

带通信号的数字正交采样定理及优化设计¹

戎建刚

(中国航天机电集团公司 8511 研究所 南京 210016)

摘 要 在数字正交采样中,带通信号存在频谱迁移问题,虽然满足带通信号的采样定理,仍可能产生频谱混叠.该文证明了带通信号的数字正交采样定理,并讨论了这种采样系统的优化设计.

关键词 带通信号,正交采样,采样定理,混叠

中图分类号 TN911.72

1 引言

带通信号在通讯、雷达和电子对抗等许多领域得到广泛应用,文献 [1-3] 给出了带通信号采样定理.正交信号 I, Q 分量包含着幅度和相位信息,是解调复杂调制信号所必需的,从带通信号获取 I, Q 分量的传统方法,是由模拟正交混频器作正交解调,得到模拟的 I, Q 分量,再用两路 A/D 分别采集,得到正交的 $I[n], Q[n]$ 分量.受模拟器件的一致性和稳定性等因素限制,两路正交分量之间的幅度一致性和相位正交性难以完全保证.现在的数字技术可以实现数字正交调制来获得 $I[n], Q[n]$ 分量,如图 1 所示, $\omega_0 = 2\pi f_0/f_s$ 是归一化角频率.数字正交调制产生两个结果:一个是我们所需要的正交分量 $I[n]$ 和 $Q[n]$,另一个是带通信号的频谱发生迁移 $\omega \pm \omega_0$.文献 [2, 4-8] 讨论的数字正交采样仅考虑第一种情况,由于频谱的迁移,即使满足了带通信号采样定理,还可能出现频谱的混叠,本文将讨论带通信号在数字正交混频下的采样和优化设计.

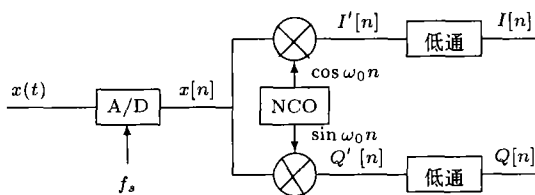


图 1 带通信号的数字正交采样原理图

2 带通信号的数字正交采样定理

带通信号采样定理的证明见文献 [1-3],对带通信号的采样数据作数字正交化处理,工程应用越来越广泛.因为数字正交调制频率 f_0 的影响,使带通信号的采样定理在这里不再适用,必须采用下面给出的采样定理.

定理 带通信号 $x(t)$ 的上下截止频率分别记为 f_H 和 f_L ,带宽 $B = f_H - f_L$,在采样率 f_s 和正交调制 f_0 下,根据正交调制输出不失真地重建信号的充要条件是

$$2(f_H + f_0)/m \leq f_s \leq 2(f_L + f_0)/(m - 1), \quad m = 1, 2, \dots, [f_H/B + f_0/B] \quad (1)$$

$$2(f_H - f_0)/m \leq f_s \leq 2(f_L - f_0)/(m - 1), \quad m = 1, 2, \dots, [f_H/B - f_0/B] \quad (2)$$

$$B/2 \leq |f_0| \leq (f_s - B)/2 \quad (3)$$

¹ 1999-11-03 收到, 2000-07-28 定稿

证明 正交调制输出 $I'[n]$ 和 $Q'[n]$ 分别为

$$\begin{aligned} I'[n] &= \left[x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n) \right] \cos \omega_0 n = x(t) \cdot \cos \omega_0 t \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n) \\ &= \frac{1}{2} x(t) (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} Q'[n] &= \left[x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n) \right] \sin \omega_0 n = x(t) \cdot \sin \omega_0 t \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n) \\ &= \frac{1}{2j} x(t) (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n) \end{aligned} \quad (5)$$

对于 $x(t)e^{-j\omega_0 t}$, 由带通信号采样定理^[1-3]得(1)式。同理, $x(t)e^{j\omega_0 t}$ 可得(2)式。因为 $x(t)e^{-j\omega_0 t}$ 和 $x(t)e^{j\omega_0 t}$ 的频谱不能混迭, 即 $f+f_0$ 谱块与 $f-f_0$ 谱块不混迭, 必须满足 $|f_0| \geq B/2$; 同时, 在 f_s 采样后, 由于频谱周期拓展, $f+f_0$ 谱块与 f_s+f-f_0 谱块(或者 $f-f_0$ 谱块与 $-f_s+f+f_0$ 谱块)不能混迭, 还必须满足 $|f_0| \leq (f_s-B)/2$, 可得(3)式。

根据线性叠加原理, $I'[n], Q'[n]$ 的约束条件必须同时满足(1)~(3)式。下面再来推导其时域表达式, 令

$$x'[n] = I'[n] + jQ'[n] = x[n]e^{j\omega_0 n} \quad (6)$$

根据文献[3]的结论, 得到

$$x'(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x'[n] \frac{1}{2\pi f_s} \int_E e^{j2\pi(t-n)\tau} d\tau \quad (7)$$

式中 $E = [f_L - f_0, f_H - f_0] \cup [-f_L - f_0, -f_H - f_0]$ 为 $x'(t)$ 的通带。为了求得 $x(t)$, 还必须对 $x'(t)$ 作频移

$$x(t) = x'(t)e^{-j\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi f_s} e^{-j\omega_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [I'[n] + jQ'[n]] \int_E e^{j2\pi(t-n)\tau} d\tau \quad (8)$$

上式即为带通信号数字正交采样定理的时域形式。

证毕

3 优化设计

在设计图1所示的带通信号数字正交采样系统时, 需要考虑低通滤波器和数字正交混频器的优化设计。

带通信号 $x(t)$ 存在图2(a)所示的正谱块 f 和负谱块 $-f$, 在数字正交混频后, 产生的 $f-f_0, f+f_0, -f-f_0$ 和 $-f+f_0$ 4个谱块将以 f_s 为周期在频域上周期延拓, 产生 $if_s + f - f_0, if_s + f + f_0, jf_s - f - f_0$ 和 $jf_s - f + f_0$ 谱块, $i, j = -\infty, \dots, +\infty$ 。

先讨论 $f_0 \geq 0$, 从图2(b)可见, 谱块 $(m-1)f_s - f + f_0$ 和 $mf_s - f - f_0$ 分居谱块 $f - f_0$ 和 $f + f_0$ 左右两侧且不混叠, 谱块 $f + f_0$ 和 $f - f_0$ 不混叠。令 $r = [f_L/f_s]$, 则以上4个谱块向左移动 rf_s 后, 对应的数字频率可能进入 $[-\pi, \pi]$, 我们称 $f - f_0 - rf_s$ 为基带谱块。考虑正频率轴, 基带谱块有 $f - f_0 - rf_s \geq 0$, 进入低通滤波器的最高频率为 $f_H - f_0 - rf_s$, 在基带谱块右侧的所有谱块中, 最低频率为 $\min\{(m-r)f_s - f_H - f_0, f_L + f_0 - rf_s\}$, 基带谱块与右相邻谱块的频率间隔为 $\min\{mf_s - 2f_H, 2f_0 - B\}$, 在数字频率下,

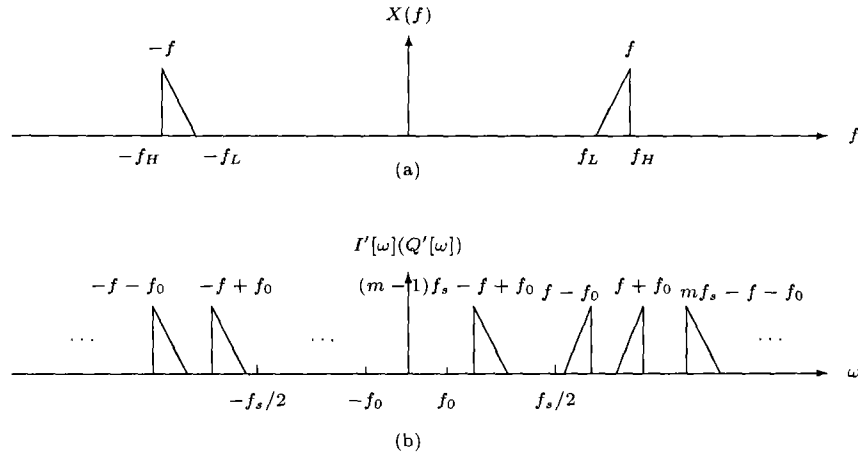


图 2

(a) $x(t)$ 的频谱 (b) $I'[n](Q'[n])$ 的频谱

基带谱块:

$$[2\pi(f_L - f_0 - rf_s)/f_s, 2\pi(f_H - f_0 - rf_s)/f_s] \quad (9)$$

基带右侧谱块范围:

$$[2\pi \min\{m - r - (f_H + f_0)/f_s, (f_2 + f_0)/f_s - r\}, \pi] \quad (10)$$

基带与右侧谱块的间距:

$$I(f_0, f_s, f_H, B, m) = 2\pi \min\{m - 2f_H/f_s, (2f_0 - B)/f_s\} \quad (11)$$

(9), (10) 和 (11) 式是低通滤波器的设计依据, 根据它们可以分别确定低通滤波器的通带、阻带和过渡带设计参数。低通滤波器的过渡带越宽, 滤波器实现越容易, 低通滤波器折叠损耗也越小。为了降低进入低通滤波器的最高频率, 让基带谱块向左移, (9) 式变为

$$[2\pi(f_L - f_0 - rf_s)/f_s, 2\pi(f_H - f_0 - rf_s)/f_s] = [0, 2\pi B/f_s] \quad (12)$$

得到

$$f_L = f_0 + rf_s \quad (13)$$

令 $b = B/f_s$ 表示归一化带宽, (11) 式变为

$$I(\omega_0, b, m, r) = 2\pi \min\{m - 2r - 2b - 2\omega_0/(2\pi), 2\omega_0/(2\pi) - b\} \quad (14)$$

由 (13) 和 (2) 式得到

$$m - 2r \leq 1 \quad (15)$$

因为 m 和 r 都是整数, 且 $I(\omega_0, b, m, r)$ 必须大于 0, 所以有

$$m - 2r = 1 \quad (16)$$

可把 (14) 式进一步简化为

$$I(\omega_0, b) = 2\pi \min\{1 - 2b - 2\omega_0/(2\pi), 2\omega_0/(2\pi) - b\} \quad (17)$$

以上讨论了 $f_0 \geq 0$ 的优化设计, 在 $f_0 \leq 0$ 情况下, 需要作变量代换 $f_0 = -f_0$, 所得结果仍然有效, 因此可把 (17) 式写成

$$I(|\omega_0|, b) = 2\pi \min\{1 - 2b - 2|\omega_0|/(2\pi), 2|\omega_0|/(2\pi) - b\} \quad (18)$$

该式给出了低通滤波器过渡带的计算公式, 仅与归一化的角频率 ω_0 和带宽 b 有关。

以上从低通滤波器的角度研究了优化设计问题, 对于数字正交混频器来说, 需要执行乘法运算 $x[n] \sin(\omega_0 n)$ 和 $x[n] \cos(\omega_0 n)$, 因为乘法运算计算量较大, 如果让 ω_0 取 $\pm\pi, 0, \pm\pi/2$ 等特殊值, 就可以使乘法运算简化为符号赋值运算, 在 $\omega_0 = \pm\pi$ 或 $\omega_0 = 0$ 情况下, 不能同时得到 $I[n], Q[n]$ 分量, 因此只能取 $\omega_0 = \pm\pi/2$ 。由于 $I(|\pi/2|, b) \geq 0$, 从 (18) 式可得 $b \leq 1/4$, 也就是说, 只有较小的相对带宽才能采用符号赋值运算实现数字正交混频。

这里采用文献 [2] 中的例子, $B = 3\text{MHz}$, $f_L = 19.5\text{MHz}$, 要求选择最小的 f_s 满足 $|\omega_0| = \pi/2, I(|\omega_0|, b) \geq \pi/4$ 。如果 $f_0 = f_s/4$, 因为要求最小的 f_L , 从 (13) 式得到 $r = 0$, 采样率 $f_s = 4f_L = 78\text{MHz}$, 不满足 (1) 式; 如果 $f_0 = -f_s/4$, 则 $r = 1$, 采样率 $f_s = 4f_L/3 = 26\text{MHz}$ 和 $b = 3/26, I(|-\pi/2|, 3/26) = 0.269\pi$, 可以验证 f_s 同时满足 (1) 和 (2) 式。文献 [2] 根据带通信号采样定理求得的结果为 $f_s = 27\text{MHz}, I = 0.519\pi$, 两者结果相差很大, 这是由于正交采样的约束条件更加苛刻所致。

4 结 论

本文证明了带通信号的数字正交采样定理, 并讨论了数字正交采样系统的优化设计, 所得结果对于工程应用是有意义的。

参 考 文 献

- [1] 杨福生, 戴先中, 带通信号的采样定理, 信号处理, 1986, 2(1), 58-61.
- [2] 王飞雪, 等, 带通信号采样定理和全数字式正交检波器的设计, 电子科学学报, 1999, 21(3), 307-310.
- [3] 王桥, 吴乐南, 任意带通信号的采样定理与频带整体适应性数据表示, 电子科学学报, 2000, 22(3), 398-401.
- [4] H. L. Liu, A. Ghafoor, *et al.*, A new quadrature sampling and processing approach, IEEE Trans. on AES, 1989, AES-25(3), 733-747.
- [5] L. E. Pellon, A double Nyquist digital product detector for quadrature sampling, IEEE Trans. on Signal Processing, 1992, SP-40(7), 1670-1681.
- [6] [美] 詹姆, 崔保证, 宽带接收机数字技术, 电子工业部第二十九所情报室, 《电子战技术文选》编辑部, 1996, 7, 第八章.
- [7] 吴远斌, 一种数字式正交检波器的设计, 电子科学学报, 1997, 19(1), 68-71.
- [8] 林云松, 等, 基带采样率内任意带通信号的正交采样, 电子科学学报, 1999, 21(3), 296-301.

THE DIGITAL QUADRATURE SAMPLING THEOREM FOR BANDPASS SIGNAL AND ITS OPTIMUM DESIGN

Rong Jiangang

(The 8511th Research Inst. of China Aerospace Machinery & Electronics Corp., Nanjing 210016)

Abstract For bandpass signal under digital quadrature sampling, there is spectrum shifting. Although the sampling frequency satisfies the sampling theorem, it may cause spectrum aliasing. The digital quadrature sampling theorem for bandpass signal is presented and the optimum design for the sampling system is also discussed in this paper.

Key words Bandpass signal, Quadrature sampling, Sampling theorem, Aliasing

戎建刚: 男, 1963 年生, 研究员, 主要从事电子战信息处理和数字接收机的研究。