

多子波变换中的一种新预滤波器¹

彭志威 保 锋 廖桂生

(西安电子科技大学电子工程研究所 西安 710071)

摘 要 预处理在一般的多子波变换中是一个不可或缺的过程,本文在分析和总结了现有的针对 GHM 多子波所构造的预滤波器的思想后,推导并给出了一个针对 GHM 多子波设计的预滤波器,它具有 2 阶近似和长度 1. 同时证明了长度 1 的重复信号预处理的近似阶不可能为 2 或以上.

关键词 多子波变换, 预滤波, 平衡

中图分类号 TN713

1 引 言

目前,多子波已成为子波理论的研究热点之一,它是用多个尺度函数和多个子波来表示信号.文献 [1] 应用分形内插函数构造了第一个非样条的多子波(一般称为 GHM 多子波).随后,更多的对称的和正交的多子波被构造 [2-4].文献 [5] 基于基本的 Hermit 样条构造了一个多子波.近来,多子波理论又取得了很大的进展 [6].

多子波的重要性是可同时满足如下四个性质:(1)短支撑;(2)正交性;(3)线性相位的对称性;(4)高阶的消失矩.对于任何实值的单子波来说,是不可能同时满足这些性质的.

多子波的理论研究已有不少的成果,但在实际信号处理应用中仍然很有限.因为不像单子波情况下有 Mallat 塔式算法作为信号分解和重构的好算法,而多子波情况,一个好的算法框架仍然没找到.问题的关键之一在于要设计一个适当的预滤波器,将一维信号变为多子波变换所需要的向量输入流,这正是本文的目的.

本文组织如下:第 2 节简单地介绍了多子波概念和离散多子波变换(DMWT),以及预处理概念.第 3 节分析了现有的预滤波器的设计思想,并给出了一些构造结果;同时证明了,对 GHM 多子波来说,不存在长度 1、近似阶 2 的重复信号预滤波器;第 4 节对 GHM 多子波推导并给出了一个长度 1、近似阶 2 的新的预滤波器;第 5 节是一简单的信号压缩性能比较.

2 多子波和离散多子波变换

一组函数集 $\psi_1, \dots, \psi_r (\in L^2(R))$ 称为 r 阶正交的多子波,如果其伸缩和平移 $\psi_1(2^{-j}x - k), \dots, \psi_r(2^{-j}x - k), j, k \in Z$ 形成 $L^2(R)$ 的一组正交基.与单子波情形类似,多子波的构造也与一 r 阶的多分辨率分析(MRA)相联系.一 r 阶的 MRA 就是满足下列条件的 $L^2(R)$ 中的一组嵌套的闭子空间序列 $\{V_j\}$: (1) $V_j \subset V_{j-1}, j \in Z$; (2) $\bigcap_{j \in Z} V_j = \{0\}, \overline{\bigcup_{j \in Z} V_j} = L^2(R)$; (3) $f \in V_j \Leftrightarrow f(2\bullet) \in V_{j-1}$; (4) 存在 r 个函数 ϕ_1, \dots, ϕ_r , 使得 $\{\phi_j(\bullet - k), 1 \leq j \leq r, k \in Z\}$ 是 V_0 的一组正交基.这里,称函数 ϕ_1, \dots, ϕ_r 为尺度函数,它们生成 $MRA\{V_j\}$. 对于一个 $MRA\{V_j\}$, 设 $W_j = V_{j-1} - V_j$ 是 V_j 在 V_{j-1} 中的正交补,则条件 (1) 和 (2) 意味着 $W_j \perp W_k, j \neq k$ 和 $\sum_{j \in Z} \oplus W_j = L^2(R)$. 此时,存在紧支撑函数 ψ_1, \dots, ψ_r , 使得其整数平移形成

¹ 1998-10-26 收到, 1999-08-12 定稿
国家自然科学基金资助项目

W_0 的一组正交基, 进而, ψ_1, \dots, ψ_r 的 2-因子伸缩和整数平移形成 $L^2(R)$ 的一组正交基. $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_r)^T$ 和 $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_r)^T$ 也分别称为尺度函数和多子波.

如果 $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_r)^T$ 是紧支撑尺度函数, 那么, 条件 (1),(3) 和 (4) 意味着存在一组有限支撑的 $r \times r$ 阶的矩阵序列 $\{H_k\}$, 使得下列的两尺度方程成立.

$$\Phi(x) = \sqrt{2} \sum_k H_k \Phi(2x - k) \quad (1)$$

同样, 存在另一组有限支撑的 $r \times r$ 阶的矩阵序列 $\{G_k\}$, 使得另一两尺度方程成立.

$$\Psi(x) = \sqrt{2} \sum_k G_k \Psi(2x - k) \quad (2)$$

设 $H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} H_k e^{-ik\omega}$, $G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} G_k e^{-ik\omega}$, 则 (1) 式和 (2) 式等价于

$$\hat{\Phi}(\omega) = H\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\Phi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad \hat{\Psi}(\omega) = G\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\Psi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (3)$$

$\{H, G\}$ 称为多子波滤波器组 (通常简称为多滤波器组), H 称为矩阵低通滤波器, G 称为矩阵高通滤波器. 对于 GHM 多子波, 多滤波器组 $\{H, G\}$ 的各系数矩阵是

$$H_0 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5\sqrt{2}} & \frac{4}{5} \\ -\frac{1}{20} & -\frac{3}{10\sqrt{2}} \end{bmatrix}, H_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{9}{20} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{9}{20} & -\frac{3}{10\sqrt{2}} \end{bmatrix}, H_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{20} & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_0 = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 3 \end{bmatrix}, G_1 = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & -\frac{10}{\sqrt{2}} \\ -\frac{9}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}, G_2 = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{9}{\sqrt{2}} & -3 \end{bmatrix}, G_3 = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

由 MRA 性质和两尺度方程 (1) 式和 (2) 式, 类似于单子波情况, 可得到如下的离散多子波变换 (DMWT)

$$S_{j,k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} H_{n-2k} S_{j-1,n} \quad (4)$$

$$D_{j,k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} G_{n-2k} C_{j-1,n} \quad (5)$$

$$S_{j-1,k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} H_{k-2n}^T S_{j,n} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} S_{k-2n}^T D_{j,n} \quad (6)$$

(4) 和 (5) 式是 DMWT 分解算法, (6) 式是重构算法 (逆 DMWT), 式中 S 和 D 均是二维列向量, 多滤波器组 $\{H, G\}$ 构成完全重构的正交的多滤波器组. 两通道的矩阵滤波器组作用在两输入的数据流上, 滤波成 4 输出的数据流, 然后下 2 抽取. 虽然, 多滤波是一个有下抽取的卷积, 但是, 滤波器系数是矩阵, 输入具有向量形式. 在多子波变换的情况下, 这产生了一个新的问题: 为了开始 DMWT, 必须先对原标量数据流进行预处理, 以得到向量输入流; 在逆 DMWT (IDMWT) 后, 对应地要有一个后处理, 将向量输出数据流还原成标量数据流. 这是多子波变换与标量子波变换不同的地方, 也是多子波变换面临的一个难点.

预处理可用一个预滤波器 Q 实现, 后处理可用一个后滤波器 P 实现. 一个完整的 DMWT 如图 1 所示. 显然, 预滤波、DMWT、IDMWT 和后滤波应该在中间过程没做任何处理的情况下, 能精确地恢复输入信号, 即满足完全重构性质.

若记 $Q(\omega) = \sum_n Q_n e^{-i\omega n}$, $P(\omega) = \sum_n P_n e^{-i\omega n}$, 其中 Q_n 和 P_n 分别是预滤波器和后滤波器的矩阵响应序列, 则 $\forall \omega \in [0, 2\pi]$, 有如下等式

$$Q(\omega) \cdot P(\omega) = I \quad (7)$$

即 $P(\omega)$ 是 $Q(\omega)$ 的逆. 在时域上表现为

$$Q * P = \sum_n Q_n P_{n-k} = \delta_k I \quad (8)$$

若 $Q(\omega)$ 是有限的三角多项式酉矩阵, 则 $P(\omega)$ 是 $Q(\omega)$ 的共轭转置, 也是有限的三角多项式矩阵, 并称预滤波器是正交的.

从考虑问题的不同角度出發, 对同一多子波可以构造不同的预滤波器.

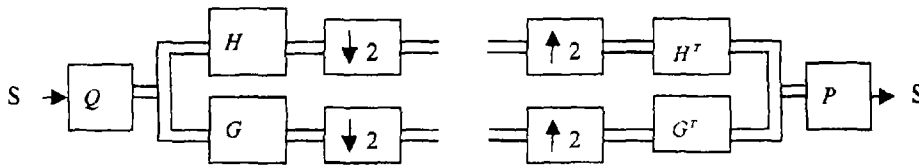


图 1 具有预滤波器和后滤波器的完全重构的多子波滤波器组

3 预处理方法的几个性质

目前, 存在两种类型的信号预处理形式. 一是矩阵预滤波器; 二是重复信号预滤波器.

矩阵预滤波器就是一个由一组 2×2 阶的矩阵序列 Q_n 定义的滤波器 Q , 它能将信号数据转换为 2-分量向量序列, 即

$$S_{0,k} = \sum_n Q_n \begin{bmatrix} s_{2(n+k)} \\ s_{2(n+k)+1} \end{bmatrix} \quad (9)$$

为了在 IDMWT 变换之后能恢复信号, 输出系数必须进行后处理. 后滤波器 P 必须满足 (7) 或 (8) 式.

重复信号预处理是将信号数据做某种重复以得到一 2 分量向量序列的方法. 具体地, 就是用不同加权取样每个观察数据两次. 这样, 重复信号预滤波器 Γ 由一向量序列 γ_n 组成, 使得

$$S_{0,k} = \sum_n S_{n+k} \gamma_n \quad (10)$$

对应于重复信号预滤波器的后处理滤波器是由一组行向量序列 ξ_n 组成的滤波器, 使得 $s_k = \sum_n \xi_n s_{0,n+k}$. 此将输出信号还原为一维信号.

顺便说明, 当 $r = 2$ 时, 即可用矩阵预滤波器, 也可用重复信号预滤波器. 但是, 使用重复信号预滤波器将产生两倍于矩阵预滤波器的系数个数. 现有的预滤波器的设计均是针对

GHM 多子波来讨论的。这些预滤波器的设计思想对以后其他多子波的预滤波器的设计有一定的启发性作用。

定义 1 一个预滤波器称为具有 m 阶近似, 如果输入序列 $s_k = k^j, j = 0, 1, \dots, m-1$ 在预处理和 DMWT 之后, 产生零高通输出。

定理 2 对于 GHM 多子波来说, 没有长度 1、近似阶 2 的重复信号预滤波器。

证明 设 $\gamma_0 \neq 0$ 是一个 2 分量的向量, 并且假设它是对应于 GHM 多子波的一个长度 1、近似阶 2 的重复信号预滤波器。那么, $S_{0,k} = \gamma_0 \cdot s_k$ 。由于它具有近似阶 2, 则对 $s_k = k, k \in Z$, 有

$$D_{1,k} = \sum_n G_n S_{0,n-2k} = \sum_n (n-2k) G_n \gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

设 $\bar{G} = \sum_n (n-2k) G_n = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2-16k & -\sqrt{2}(8-16k) \\ 3\sqrt{2} & -6 \end{pmatrix}$, 而 $\det(\bar{G}) = -\frac{8}{25} \neq 0$, 即 \bar{G} 是非奇异矩阵。因此, 由 (14) 式, 有 $\bar{G} \cdot \gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma_0 = 0$, 这与 $\gamma_0 \neq 0$ 矛盾。证毕

4 一个新的预滤波器

由定理 1 我们可以看到, 对于 GHM 多子波, 如果对应的矩阵预滤波器是正交的并且近似阶为 2, 那么它的长度至少要等于 3, 其时域局部化就不是太好。对于非正交情况, 基于内插性的预滤波器, 它虽有近似阶 2, 但其长度也为 2。另外, XGHS^[7] 预滤波器虽有长度 1 和较好的频域特性, 可是, 其近似阶是 1。而在某些应用中, 例如信号压缩, 大于 1 的近似阶是重要的。对此, 下面推导了一个长度 1、近似阶 2 的矩阵预滤波器。

从连续函数方面看^[5], Hat 函数 $H(t)$ 可以精确地表示为 GHM 尺度函数平移的线性组合

$$H(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_1(t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_1(t-1) + \varphi_2(t) \quad (12)$$

而 Hat 函数 $H(t)$ 具有性质:

- (1) $H(1) = 1$, 且 $H(n) = 0, n \neq 1$ 。
- (2) $H(t)$ 在整数点之间的区间上是线性的。
- (3) 每个线性函数 $at + b$ 是 $\{H(t-k)\}_{k \in Z}$ 的一个线性组合。

因此, 为了讨论近似性, 我们先研究常函数 $f(t) = 1$ 和线性函数 $g(t) = t - 1$ 由 GHM 尺度函数平移表示的情况。

由性质 3 和 (12) 式, 设有

$$\begin{aligned} at + b &= \sum_k c_k H(t-k) = \sum_k c_k \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_1(t-k) + \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_1(t-k-1) + \varphi_2(t-k) \right] \\ &= \sum_k \frac{c_k + c_{k-1}}{\sqrt{2}}\varphi_1(t-k) + \sum_k c_k \varphi_2(t-k) \end{aligned} \quad (13)$$

若在 (13) 式中取 $a = 0, b = 1$, 则 $f(t) = 1 = \sum_k c_k H(t-k)$ 。由性质 1, 此时可推出: $c_k = 1, k \in Z$ 。因此,

$$1 \equiv \sum_k \left[\sqrt{2}\varphi_1(t-k) + \varphi_2(t-k) \right] \quad (14)$$

若在 (13) 式中取 $a = 1, b = -1$, 则有 $g(t) = t - 1 = \sum_k c_k H(t - k)$. 由性质 1, 此时可得到: $c_k = k, k \in Z$. 有

$$t - 1 = \sum_k \left[\frac{2k-1}{\sqrt{2}} \varphi_1(t-k) + k \varphi_2(t-k) \right] \quad (15)$$

如果一个矩阵将常数信号变为方程 (14) 式中的系数, 同时, 将线性信号变为 (15) 式中的系数, 那么, 它将具有近似阶 2. 我们仍记这个矩阵预滤波器为 Q_0 . 它满足:

$$Q_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$Q_0 \cdot \begin{pmatrix} k \\ k + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2k-1}{\sqrt{2}} \\ k \end{pmatrix} \quad (17)$$

由 (16) 和 (17) 式, 通过解一联立线性方程组可以求出 $Q_0 = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, Q_0 即是长度 1、近似阶 2 的预滤波器. 其对应的后滤波器是 $P = Q_0^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \end{bmatrix}$.

下面, 根据定义 1, 我们从离散信号方面来给予验证.

设有信号 $s_k \equiv 1, k \in Z$, 那么, $S_{0,k} = Q_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, 有 $D_{1,k} = [H_0 + H_1 + H_2 + H_3] \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $S_{1,k} = [G_0 + G_1 + G_2 + G_3] \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \sqrt{2} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$. 可见, $S_{1,k}$ 是 $S_{0,k}$ 的尺度形式. 进一步, 若设有信号 $s_k = k, k \in Z$, 则 $S_{0,k} = Q_0 \cdot \begin{pmatrix} 2k \\ 2k+1 \end{pmatrix} = 2k \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$. 那么,

$$\begin{aligned} D_{1,k} &= \sum_m G_{m-2k} S_{0,m} = G_0 S_{0,2k} + G_1 S_{0,2k+1} + G_2 S_{0,2k+2} + G_3 S_{0,2k+3} \\ &= G_0 \left[2 \cdot (2k) \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right] + G_1 \left[2 \cdot (2k+1) \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &\quad + G_2 \left[2 \cdot (2k+2) \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right] + G_3 \left[2 \cdot (2k+3) \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

这说明新设计的预滤波器具有 2 阶消失矩.

5 信号压缩性能的一个简单比较

表 1 给出了应用 5 个不同的非正交的预滤波器方法于三个无噪信号函数^[6]的压缩情况. 使用的压缩度量仅仅是子波系数大于 10^{-5} 的系数个数. 重复信号预滤波方法 (RS) 产生较多的非零系数, 这是因为重复预滤波器使信号长度加倍. 我们设计的新预滤波器有最好的性能. 恒等预滤波器方法最差. 实验中, $n = 2048$, 分解层次 $J = 6$.

表 1 使用不同的预滤波器方法的信号压缩

	大于 10^{-5} 的系数个数		
	Blocks	Bumps	Heavisine
内插性预滤波器	258	1145	1180
RS 预滤波器	282	1955	2232
新预滤波器	246	1200	1238
XGHS 预滤波器	246	1596	2034
恒等预滤波器	856	1736	2003

参 考 文 献

- [1] G. Donovan, J. S. Geronimo, D. P. Hardin, P. R. Massopust, Construction of orthogonal wavelets using fractal interpolation functions, *SIAM J. Math. Anal.*, 1996, 27(9), 1158–1192.
- [2] C. K. Chui, J. Lian, A study on orthogonal multiwavelets, *Appl. Numer. Math.*, 1996, 20(1), 273–298.
- [3] Q. Jiang, Orthogonal multiwavelets with optimum time-frequency resolution, *IEEE Trans. on SP*, 1998, SP-46(4), 830–844.
- [4] J. Lebrun, M. Vetterli, Balanced multiwavelets theory and design, *IEEE Trans. on SP*, 1998, SP-46(4), 1119–1124.
- [5] G. Strang, V. Strela, Short wavelets and matrix dilation equations, *IEEE Trans. on SP*, 1995, SP-43(1), 108–115.
- [6] D. L. Donoho, I. M. Johnstone, Ideal spatial adaption via wavelet shrinkage, *Biometrika*, 1994, 81(3), 425–455.
- [7] X.-G. Xia, J. S. Geronimo, D. P. Hardin, B. W. Suter, Design of prefilters for discrete multiwavelet transforms, *IEEE Trans. on SP*, 1996, SP-44(1), 25–35.

A NEW PREFILTER FOR MULTIWAVELET TRANSFORMS

Peng Zhiwei Bao Zheng Liao Guisheng

(Institute of Electronic Engineering, Xidian University, Xi'an 710071, China)

Abstract Prefiltering is indispensable for multiwavelet transforms. This paper proposes a prefilter with the length of 1 and an approximate order of 2 for GHM multi-wavelet, and proves that the order of prefilters for length 1 repeating signals cannot be or greater than 2 for GHM multi-wavelet, after analyzing the constructing ideas of various currently existing prefilters for GHM multi-wavelet.

Key words Multiwavelet transform, Prefiltering, Balancing

彭志威: 男, 1964年生, 高级工程师, 博士, 研究方向主要有子波变换, 通信系统.
 保铮: 男, 1927年生, 教授, 博士生导师, 中科院院士, 研究方向是雷达系统.
 廖桂生: 男, 1963年生, 教授, 博士生导师, 研究方向是雷达信号处理, 阵列信号处理.