

## 基于过零点-极点估计的瞬时频率幅度算法

孙 晖 朱善安

(浙江大学 电气工程学院 杭州 310027)

**摘 要** Hilbert-Huang 变换(HHT)理论通过经验模态分解(EMD)提取信号的内蕴模态函数(IMF), 并对 IMF 利用 Hilbert 变换得到信号的时频幅度谱和边际谱。在总结 Hilbert 变换理论和算法实现局限性的基础上, 提出基于过零点-极点估计求取 IMF 瞬时频率、幅度算法, 通过对离散信号插值运算精确求取过零点和极点位置, 并据此求出相应点的瞬时频率和幅度, 最后采用三次样条求取信号的瞬时频率幅度曲线。通过几个典型的例子对该算法进行检验, 结果表明, 与 Hilbert 变换结果比较, 借助该算法得到信号的时频幅度谱和边际谱结果更精确、频率分辨率更好。

**关键词** Hilbert-Huang 变换, 经验模态分解, 内蕴模态函数, 过零点-极点估计

**中图分类号:** TN911.7

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1009-5896(2006)05-0905-04

## The Algorithm Based on Zero-Crossing and Extremum Estimation to Obtain Instantaneous Frequency and Instantaneous Amplitude

Sun Hui Zhu Shan-an

(College of Electrical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

**Abstract** According to Hilbert-Huang Transform (HHT) theory, the signal's Intrinsic Mode Function (IMF) is extracted by Empirical Mode Decomposition (EMD). Its time-frequency-amplitude spectrum and marginal spectrum are obtained by Hilbert transform. In the basis of summarizing the limitation of the Hilbert transform theory and its realization, an algorithm based on zero-crossing and extremum estimation to obtain instantaneous frequency and instantaneous amplitude is presented. The positions of zero-crossings and extrema are obtained accurately by interpolating the discrete signal. The instantaneous frequency and instantaneous amplitude of relative points are obtained. The signal's instantaneous frequency and instantaneous amplitude waveform are obtained by cubic spline interpolation computation. By testing the result and comparing the detail of result with Hilbert transform method through several representative examples, it shows that the instantaneous frequency and instantaneous amplitude obtained by zero-crossing and extremum estimation algorithm are more precise and the frequency resolution is better.

**Key words** Hilbert-Huang Transform (HHT), Empirical Mode Decomposition (EMD), Intrinsic Mode Function (IMF), Zero-crossing and extremum estimation

### 1 引言

Hilbert-Huang变换(Hilbert-Huang Transform, HHT)是近年来发展起来的一种新的时间序列分析方法<sup>[1,2]</sup>, 其核心是经验模态分解(Empirical Mode Decomposition, EMD), 把复杂的信号分解成若干个内蕴模态函数(Intrinsic Mode Function, IMF), 再对IMF进行Hilbert变换, 得到每一个IMF随时间变化的瞬时频率和振幅, 最后求得时间-频率-振幅的三维谱分布。由于EMD是自适应的, 因此其分解通常快速有效; 同时, EMD是基于信号的局部变化特性, 从而可用于非线性和非平稳过程分析。与频谱分析方法(FFT)相比, EMD得到的每一个IMF的振幅和频率是随时间变化的, 消除了为反

映非线性、非平稳过程而引入的多余无物理意义的简谐波。与小波分析方法相比, HHT 具有小波分析的全部优点, 在分辨率上消除了小波分析的模糊和不清晰, 具有更准确的谱结构。因而 HHT 在分析非线性和非平稳过程中具有很高的应用价值。

Hilbert变换解调是一种积分变换, 隐含了对解调结果的平滑, 即低通滤波处理, 这使解调结果出现非瞬时响应特性, 即在频率变化较快时出现按指数规律衰减的波动, 从而使解调误差增大<sup>[3]</sup>。Hilbert变换的实现算法需要对IMF加窗, 截取长度为 $N$ 的整段数据, 借助DFT(FFT)算法进行估计, 因此, Hilbert变换算法具有DFT(FFT)算法所具有的所有缺点, 如窗口截断必然带来的混叠、泄漏效应等。本文提出基于对IMF进行过零点-极点估计的瞬时频率、幅度算法, 旨在解决应用

Hilbert变换带来的种种不便。在详细讨论该算法的基础上,通过几个典型的例子对该算法进行了检验,得到了较为满意的效果。

## 2 信号的经验模态分解

### 2.1 IMF

EMD 方法是基于以下假设:任何信号由不同的固有振动模态组成,每一模态不论是线性或是非线性的,其极值点数和零交叉点数相同,在相邻的零交叉点之间只有一个极值点,任何两个模态之间是相互独立的,这样任何一个信号就可以分解为有限个 IMF 之和,其中任何一个 IMF 都满足以下条件:

(1) 整个数据段内极值点的个数和零交叉点的个数必须相等或相差最多不能超过一个。

(2) 在任何一点,由局部极大值点形成的包络线和由局部极小值点形成的包络线的平均值为零。

与简单的单调函数相比,一个 IMF 代表了一个简单的振动模态,可以表示为

$$x_a(t) = a(t)\cos[\varphi(t)] \quad (1)$$

其中  $a(t)$  应是缓变信号,即若  $a(t)$  的 Fourier 变换为  $A(f)$ ,  $\cos\varphi(t)$  的 Fourier 变换为  $B(f)$ , 则存在常数  $f_0(>0)$ , 当  $|f| > f_0$  时,  $A(f) = 0$ ; 当  $|f| \leq f_0$  时,  $B(f) = 0$ 。

### 2.2 EMD 方法

已知信号  $f(t)$ , 寻找  $f(t)$  的所有局部极大值点和所有极小值点, 拟合极值点得到上包络线  $f_{\max_i}(t)$  和下包络线  $f_{\min_i}(t)$ , 使  $f(t)$  满足:

$$f_{\min_i}(t) \leq f(t) \leq f_{\max_i}(t), t \in [t_a, t_b]$$

记  $m_{11}(t)$  为上下包络线的均值:

$$m_{11}(t) = [f_{\min_i}(t) + f_{\max_i}(t)]/2$$

$f(t)$  和  $m_{11}(t)$  的差为  $h_{11}(t)$ :

$$h_{11}(t) = f(t) - m_{11}(t)$$

继续以上步骤:  $h_{1(k-1)}(t) - m_{1k}(t) = h_{1k}(t)$  并由数值判止准则<sup>[1]</sup>得到:

$$x_{a1}(t) = h_{1k}(t)$$

$x_{a1}(t)$  就是第一个从  $f(t)$  中获得的 IMF。把以上各式加起来, 得

$$x_{a1}(t) = f(t) - \sum_{i=1}^k m_{1k}(t)$$

$$r_1(t) = f(t) - x_{a1}(t)$$

对  $r_1(t)$  重复上述步骤, 有

$$f(t) = \sum_{i=1}^n x_{ai}(t) + r_n(t) \quad (2)$$

$r_n(t)$  称为余项, 它是信号  $f(t)$  的单调趋势项。

由以上分析可知, IMF 的逐次提取总是体现先高频, 然后依次分解出低频、较低频, 即 EMD 是有规律的。它能全面展现频率信息的正确分布, 能量的分布并没有因分解的不

同而发生错误。因此 EMD 方法可以认为是原始信号信息的分解、分配过程。可以任意选取若干 IMF 分量(或它们的组合)来分析信号所体现的物理现象。如果从这个角度来理解 EMD 方法, 它就是一种自适应滤波方法。

## 3 基于过零点-极点估计的瞬时频率、幅度算法

### 3.1 离散调制信号的过零点-极点估计

对式(1)以抽样周期  $T$  抽样, 得到离散序列  $x(n)$ , 设其长度为  $N$ , 则

$$x(n) = a(n)\cos[\varphi(n)] \quad (3)$$

寻找所有的序列过零点对  $H(i) = \{x(n_i), x(n_i + 1)\}$ , ( $0 \leq n_i < N - 1$ )。即若:  $x(n_i) > 0 (< 0)$ , 则必有  $x(n_i + 1) < 0 (> 0)$ 。

对每个序列过零点对采用线性插值<sup>[4]</sup>, 得到零点对应的的时间值  $t_{zi} = n_{zi} \cdot T$ , 其中

$$n_{zi} = n_{i+1} + \frac{x(n_i + 1)}{x(n_i) - x(n_i + 1)} \quad (4)$$

同理, 寻找所有序列过极点组  $J(i) = \{x(n_i), x(n_i + 1), x(n_i + 2)\}$ , ( $0 \leq n_i < N - 1$ )。此时必有  $x(n_i + 1) \geq x(n_i)$  且  $x(n_i + 2) \leq x(n_i + 1)$  或  $x(n_i + 1) \leq x(n_i)$  且  $x(n_i + 2) \geq x(n_i + 1)$ 。

对每个序列过极点组采用 Newton 二次多项式插值<sup>[4]</sup>:

$$x(n_{ei}) = x(n_i) + x[n_i, n_i + 1](n_{ei} - n_i) + x[n_i, n_i + 1, n_i + 2](n_{ei} - n_i)(n_{ei} - n_i - 1) \quad (5)$$

其中  $x[\cdot]$  为差商算子。对式(5)求导并令其为 0, 得到极点对应的的时间值  $t_{ei} = n_{ei} \cdot T$ , 其中

$$n_{ei} = n_i + \frac{x(n_i + 2) - x(n_i)}{2[x(n_i + 1) - x(n_i) - x(n_i + 2)]} + 1 \quad (6)$$

将式(6)代入式(5)即得到极值:

$$x(n_{ei}) = x_a(t_{ei}) = x(n_i + 1) + \frac{[x(n_i + 2) - x(n_i)]^2}{8[2x(n_i + 1) - x(n_i) - x(n_i + 2)]} \quad (7)$$

### 3.2 基于过零点-极点估计的瞬时频率、幅度算法

设调制信号相邻过零点位置为  $t_{zi}$ ,  $t_{z(i+1)}$ ,  $t_{z(i+2)}$ , 根据 IMF 特性, 在相邻的过零点之间有且只有一个极值点, 设其位于  $t_{ei}$  和  $t_{e(i+1)}$ 。定义在  $0.5(t_{zi} + t_{z(i+2)})$  处的瞬时频率估计为

$$f_{0.5(t_{zi} + t_{z(i+2)})} = \frac{3(f_{zi-ei} + f_{zi-z(i+1)} + f_{zi-e(i+1)} + f_{zi-z(i+2)})}{25} \quad (8)$$

其中  $f_{zi-ei} = \frac{1}{t_{ei} - t_{zi}}$ ,  $f_{zi-z(i+1)} = \frac{1}{t_{z(i+1)} - t_{zi}}$

$$f_{zi-e(i+1)} = \frac{1}{t_{e(i+1)} - t_{zi}}, f_{zi-z(i+2)} = \frac{1}{t_{z(i+2)} - t_{zi}}$$

同理得到在该点的瞬时幅度估计:

$$a_{0.5(t_{zi} + t_{z(i+2)})} = \frac{3(a_{zi-ei} + a_{zi-z(i+1)} + a_{zi-e(i+1)} + a_{zi-z(i+2)})}{25} \quad (9)$$

其中  $a_{zi-ei} = 4|x_a(t_{ei})|$ ,  $a_{zi-z(i+1)} = 2|x_a(t_{ei})|$

$$a_{zi-e(i+1)} = \frac{2}{3}|x_a(t_{ei}) + x_a(t_{e(i+1)})|$$

$$a_{z_i-z(i+2)} = \frac{1}{2} |x_a(t_{e_i}) + x_a(t_{e(i+1)})|$$

对所得的结果进行三次样条插值运算(平滑), 由此得到瞬时频率曲线  $f(t)$  和瞬时幅度曲线  $a(t)$ 。

### 3.3 信号的时频幅度谱和边际谱

对式(2)中的每个 IMF 计算瞬时频率和瞬时幅度, 得到:

$$f(t) = \text{Re} \sum_{i=1}^n a_i(t) e^{j2\pi \int_{f_i(t)} dt} \quad (10)$$

这里省略了余项  $r_n(t)$ , 因为它不过是单调函数或常数,  $\text{Re}$  表示取实部。展开式称为信号的时间-频率-幅度谱, 记为

$$H(f, t) = \text{Re} \sum_{i=1}^n a_i(t) e^{j2\pi \int_{f_i(t)} dt} \quad (11)$$

进一步可定义边际谱:

$$h(f) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f, t) dt \quad (12)$$

## 4 应用

### 4.1 例 1

考虑一个余弦函数在某一时刻突然改变频率的情况, 该例子常用来评估算法的频率分辨力。原始信号采用归一化采样频率, 如图 1 所示:

$$x(n) = a(n) \cos[2\pi f(n)n] \quad (13)$$

$$f(n) = \begin{cases} 0.045\text{Hz}, & 0 < n \leq 400 \\ 0.02\text{Hz}, & 400 < n \leq 600 \\ 0.05\text{Hz}, & 600 < n \leq 1000 \end{cases}$$

$$a(n) = \begin{cases} 1, & 0 < n \leq 400 \\ 4, & 400 < n \leq 600 \\ 1, & 600 < n \leq 1000 \end{cases}$$

由于该信号本身就是 IMF, 因此直接对其解调处理。图 2 和图 3 分别是采用 Hilbert 变换和过零点-极点估计的时频幅度谱。

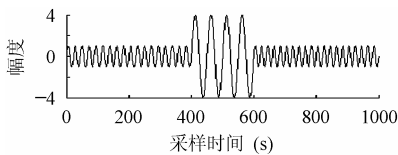


图 1 原始信号波形

Fig.1 Original signal waveform

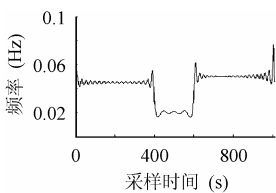


图 2 基于 Hilbert 变换的时频幅度谱

Fig.2 Time-frequency-amplitude

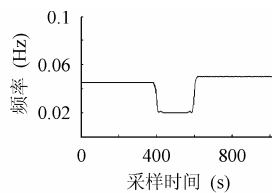


图 3 基于过零点-极点估计的时频幅度谱

Fig.3 Time-frequency-amplitude

spectrum based on Hilbert transform

spectrum based on zero-crossing and extremum estimation

由图 2 可知, Hilbert 变换解调能够识别信号频率突变的位置, 而在突变信号的两端, 出现了调制现象, 使在较大范围出现瞬时频率偏差。这是由于参与 Hilbert 变换运算的有限长度数据和快速变化的频率引起的, 是不可避免的。图 3 中能更清晰得到瞬时频率的数值和频率突变的位置, 只是在频率突变的转折处少数几点的数据出现了波动, 由于基于过零点-极点估计解调的算法是直接对时域数据计算瞬时频率, 不需要积分和时频转换, 从而从根本上解决了 Hilbert 变换解调的缺陷。

为了更好地比较两种算法解调的结果, 得到信号的边际谱分别如图 4(a), 4(b)所示。显然, 图 4(b)所示频率幅度更高、范围更窄, 因而频率分辨力更好。

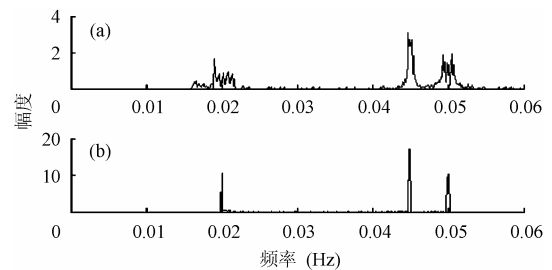


图 4 信号的边际谱

(a)基于 Hilbert 变换算法 (b)基于过零点-极点估计算法

Fig.4 Signal's marginal spectrum

(a) Algorithm based on Hilbert transform

(b) Algorithm based on zero-crossing and extremum estimation algorithm

### 4.2 例 2

考虑如下混合信号:

$$x_a(t) = [1 + 0.5 \sin(2\pi 0.004t)] \cos[2\pi 0.07t + 0.4 \sin(2\pi 0.015t)] + \sin(2\pi 0.02t)$$

信号由一基频为 0.07Hz, 调频频率为 0.015Hz、调幅频率为 0.004Hz 的调制信号和一频率为 0.02Hz 的正弦信号叠加而成。于是, 得到调制信号的瞬时频率为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d[2\pi 0.07t + 0.4 \sin(2\pi 0.015t)]}{dt} = 0.07 + 0.006 \cos(2\pi 0.015t) \quad (14)$$

其频率变动范围为

$$0.064 \leq f(t) \leq 0.076 \quad (15)$$

调制信号的幅值为

$$a(t) = 1 + 0.5 \sin(2\pi 0.004t) \quad (16)$$

采用归一化采样频率, 得到原始信号的 500 点离散数据。图 5 是对信号进行 EMD 后采用 Hilbert 变换的时频幅度谱; 图 6 是对信号进行 EMD 后采用过零点-极点算法的时频幅度谱。图 6 中有 2 个频率成分, 一个是随时间基本不变的 0.02Hz 频率成分; 另一个是围绕基频 0.07Hz 频率随时间波动的频

率分量,波动频率为 0.015Hz,符合式(14)的要求,频率变动未超出式(15)的变动范围。整个序列明暗变化了 2 次,说明幅值变化的频率是 0.004Hz,符合式(16)。

在图 5 中,由于起始端点频率的突变,时频幅度谱出现了波动,并影响到中间的数据,而图 6 中曲线较为平滑,其结果正确表征了混合信号本来的时频幅度特性。

图 7 是两种算法求得的混合信号边际谱的比较。由图 7(b)可知,并与图 7(a)的结果比较,在单一频率  $f = 0.02\text{Hz}$  处,其范围更窄;在调制信号频率范围(符合式(15)要求),其边缘

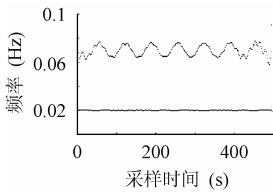


图 5 混合信号基于 Hilbert 变换的时频幅度谱  
Fig.5 Mixture signal's time-frequency-amplitude spectrum based on Hilbert transform

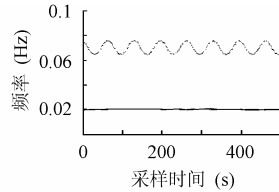


图 6 混合信号基于过零点-极点估计的时频幅度谱  
Fig.6 Mixture signal's time-frequency-amplitude spectrum based on zero-crossing and extremum estimation

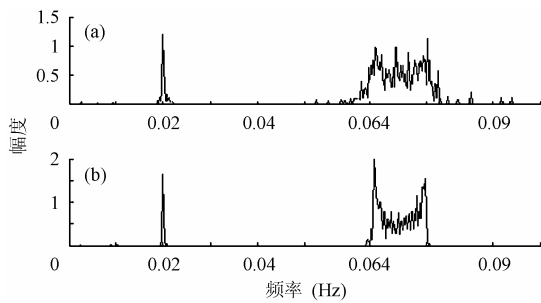


图 7 混合信号的边际谱  
(a)基于 Hilbert 变换算法 (b)基于过零点-极点估计算法  
Fig.7 Mixture signal's marginal spectrum  
(a) Algorithm based on Hilbert transform  
(b) Algorithm based on zero-crossing and extremum estimation algorithm

频率更为锐利,内部频率更为对称。在其它频率处则更为干净。显然,基于过零点-极点估计的解调算法能更好地表征原始信号本身的频率分布。

### 5 结束语

本文提出基于过零点-极点估计的 IMF 瞬时频率、幅度实现方法。通过典型例子验证了该方法求取原始信号瞬时频率、幅度的有效性。与 Hilbert 变换方法结果比较表明,基于过零点-极点估计的 IMF 瞬时频率、幅度算法能够更准确地表征原始信号本身的频率分布,避免了应用 Hilbert 变换所带来的种种不便。另外,该算法需要对 IMF 做 3 次插值处理,其中 2 次插值处理只需针对临近过零点、极点的数据,计算方法并不复杂,计算量也不大,便于计算机编程,因此具有较为广阔的应用前景。

### 参考文献

- [1] Huang N E, Shen Z, Long S R, *et al.*. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis. *Proc. of the Royal Society of London, Series A*, 1998, 454:903 – 996.
- [2] Huang N E, Shen Z, Long S R. A new view of nonlinear water waves: The Hilbert spectrum. *Annual Review of Fluid Mechanics*,1999, 31: 417 – 457.
- [3] 刘红星, 陈涛, 屈梁生等. 能量算子解调方法及其在机械信号解调中的应用. *机械工程学报*, 1998, 34(5): 85 – 90.
- [4] 李红. 数值分析. 武汉: 华中科技大学出版社,2003:17 – 23.

孙 晖: 男, 1971 年生, 讲师, 研究方向为信号处理及应用.  
朱善安: 男, 1952 年生, 教授, 研究方向为信号处理及应用.