

## Rice 信道下 LDPC 码密度进化的研究

徐 华<sup>①②</sup> 徐澄圻<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(南京邮电大学信息工程系 南京 210003)

<sup>②</sup>(盐城师范学院物理系 盐城 224002)

**摘 要** 应用低密度奇偶校验(LDPC)码译码消息的密度进化可以得到码集的噪声门限, 依此评价不同译码算法的性能, 并可以用来优化非正则 LDPC 码的次数分布对。该文首先以 Rice 信道下正则 LDPC 码为例, 讨论了不同量化阶数及步长时 BP, BP-based 和 offset BP-based 3 种译码算法的 DDE(Discrete Density Evolution)分析, 接着在 offset BP-based 译码算法的 DDE 分析基础上, 采用差分进化方法对 Rice 信道下非正则 LDPC 码的次数分布对进行了优化, 得出了相应的噪声门限。最后, 给出了 Rice 信道下码率为 1/2 的优化非正则 LDPC 码的概率聚集函数(PMF)进化曲线。

**关键词** LDPC 码, Rice 信道, 先验密度, Offset BP-based 译码算法, 离散密度进化

中图分类号: TN911.22

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2006)10-1831-06

## Research of Density Evolution of LDPC Codes over Rice Channels

Xu Hua<sup>①②</sup> Xu Cheng-qi<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(Department of Information Engineering, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210003, China)

<sup>②</sup>(Dept. of Physics, Yancheng Teachers College, Yancheng 224002, China)

**Abstract** Noise threshold of Low Density Parity Check (LDPC) codes ensemble could be calculated by density evolution of the decoding messages. According to the threshold, performance of the decoding algorithm could be evaluated and degree distribution pairs of irregular LDPC codes also might be optimized. In this paper, for regular LDPC codes on Rice channel, Discrete Density Evolution(DDE) for BP, BP-based and offset BP-based decoding algorithm were compared on different quantization level and step. Furthermore, degree distribution pairs of the irregular LDPC codes were optimized on Rice channel, which was based on DDE for offset BP-based decoding algorithm, the corresponding threshold is also calculated. Finally, the Probability Mass Function (PMF) evolution curve of optimized irregular LDPC codes with code rate 1/2 on Rice channel is given.

**Key words** Low Density Parity Check (LDPC) code, Rice channel, *A priori* density, Offset BP-based decoding algorithm, Discrete density evolution

### 1 引言

低密度奇偶校验 (Low Density Parity Check, LDPC)码在 BP译码算法下可以获得相当好的性能<sup>[1-3]</sup>, Fossorier在文献[4]中对BP算法进行了简化提出了BP-based 算法, 以适当牺牲译码性能的代价, 通过简化在校验节点上的处理大大降低了译码实现的复杂性, 在性能和复杂度间取得了很好的折衷。密度进化(Density Evolution, DE)分析的思想最初由Richardson提出<sup>[2]</sup>, 文献中详尽分析了结合BP译码算法的DE方法, 并由此得到了LDPC码集的门限值(码容量)。

DE方法可以在数值上计算得到LDPC码的平均渐进性能, 进化过程和结果与码结构参数、译码算法和信道环境有关。通过研究某种译码算法, 在译码过程中变量节点和校验节点之间传递的关于可靠性消息的概率密度函数(以下简称“消息密度”或者“消息”)在迭代中的进化, 可以分析译码是否

收敛同时由此得出相应的噪声门限, 据此可对译码算法进行较为精确的性能评价。由于译码的初始消息与信道的具体类型有关, 而消息密度的进化直接受到了初始译码消息的影响, 所以不同的信道类型对于密度进化有着不同的影响, 因此可以用于不同的信道环境下门限值的估计以及码结构 $(\lambda, \rho)$ 的优化设计。

Wei在文献[5]中研究了MAX-Log-MAP译码算法下的DE方法; 贺玉成在文献[6]中提出了BP译码算法性能的参数化估计, 给出了AWGN信道下正则LDPC码的门限值及其与Shannon限的距离。

Chung在文献[7]中研究了AWGN信道下, 结合和-积译码算法的DE分析, 特别要指出, 文献[7]中为了便于数值分析, 提出了用概率聚集函数(Probability Mass Function, PMF)来代替概率密度函数(PDF), 而基于PMF的DE分析称为离散密度进化(Discrete Density Evolution, DDE)。

Chen提出了一种通过改善迭代外信息精度的通用简化

BP-based算法: offset BP-based(偏移BP-based)算法<sup>[8]</sup>, 对在高斯信道环境下的正则(regular) LDPC码进行了DE分析, 结果表明基于offset BP-based算法得到的门限值与基于BP-based算法的相比要更接近于BP算法的门限, Chen在文献[9]中给出了基于BP-based和offset BP-based译码算法的离散密度进化的具体步骤。

Hou对Rayleigh信道下LDPC码的性能及优化进行了详细的分析<sup>[10]</sup>。在描述多径衰落信道的统计特性时, 除了Rayleigh分布外, 当存在直射路径时, 用Rice分布来描述更为准确, 如果直射路径不存在时, Rice分布则退化为Rayleigh分布。但至今尚未见在Rice信道环境下采用DE方法(或者类似方法)对LDPC码进行研究的报道。

本文采用DDE分析方法对Rice信道环境下的LDPC码进行了研究。文中首先简要介绍了几种译码算法的DDE分析方法; 接着探讨了Rice信道下LDPC码译码消息的先验密度, 在此基础上给出了利用DDE分析计算门限值的具体步骤; 进一步以正则LDPC码为例, 从门限值角度比较了3种译码算法基础上的DDE分析; 然后在offset BP-based译码算法的DDE分析基础上结合差分进化(differential evolution)算法, 得到了Rice信道下非正则LDPC码的优化次数分布对(degree distribution pairs)及相应的噪声门限值; 最后给出了Rice信道下1/2码率优化非正则LDPC码的离散密度进化曲线。

需要说明的是DE分析的研究对象是码集(ensemble)而不是某一个特定的LDPC码, 本文中设二分图具有高girth, 或者无环。

## 2 几种译码算法的DDE分析方法

### 2.1 BP译码算法的DDE分析

首先定义量化操作符 $\Omega$ ,  $\Omega(w)$ 为译码消息 $w$ 的量化消息, 如式(1)所示

$$\Omega(w) = \begin{cases} \lfloor w/\Delta + 1/2 \rfloor \Delta, & w \geq \Delta/2 \\ \lceil w/\Delta - 1/2 \rceil \Delta, & w \leq -\Delta/2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1)$$

其次, 定义两输入操作符 $\Phi(a, b) = \Omega(2 \tanh^{-1}(\tanh(a/2) \cdot \tanh(b/2)))$ ; 另对于任意的概率聚集函数 $p$ , 有 $\lambda(p) = \sum_{i=2}^{d_v} \lambda_i \otimes^{i-1} p$ ,  $\rho(p) = \sum_{j=2}^{d_c} \rho_j \Phi^{j-1} p$ , 其中 $\otimes$ 指离散卷积,  $d_v, d_c$ 分别指非正则LDPC码比特节点和校验节点的次数(degree, 也称度), 非正则码集通常用次数分布对 $(\lambda, \rho)$ 或者相应的生成函数表示,  $\lambda_i(\rho_i)$ 表示与次数为 $i$ 的比特节点(校验节点)相连的边数所占的比例。

在此基础上, BP算法的DDE分析描述为

$$p_u^{(l+1)} = \rho(p_{u_0} \lambda(p_u^{(l)})) \quad (2)$$

其中 $p_{u_0}$ 为初始译码消息的PMF,  $l$ 为迭代次数。更为详细的推导过程可参见文献[7]。

### 2.2 BP-based译码算法的DDE分析

对应BP-based算法的DDE分析步骤为: 设用 $q$ 比特来表示量化后的译码消息, 量化步长为 $\Delta$ , 量化后得到的离散消息集为 $[-N, \dots, -1, 0, 1, \dots, N]$ , ( $N = 2^{q-1} - 1$ ), 迭代分析中的消息均以 $-N, N$ 为上、下界。令 $P_Z^{(i-1)}(n)$ ,  $Q_L^{(i)}(n)$ 分别表示比特节点和校验节点译码消息的PMF, 相应的PMF的迭代公式为

$$Q_L^{(i)}(n) = \begin{cases} C_L(n), & n = -N \\ C_L(n) - C_L(n-1), & -N < n \leq N \end{cases} \quad (3)$$

其中 $C_L(n)$ 为累积分布函数, 具体推导可以参见文献[9], 比特节点的消息映射是求和运算, 对应PMF就是卷积运算:

$$P_Z^{(i)}(n) = Q_L^{(0)} \otimes [Q_L^{(i)}(n)]^{\otimes (d_v-1)} \quad (4)$$

其中 $Q_L^{(0)}$ 为校验节点的初始译码消息的PMF。

### 2.3 Offset BP-based译码算法的DDE分析

在offset BP-based算法中校验节点上的外信息 $L_{mn}^{(i)}$ 被修正为 $\text{sgn}(L_{mn}^{(i)}) \max(|L_{mn}^{(i)}| - \beta, 0)$ , offset BP-based算法的偏移参数 $\beta$ 易于量化, 适合用于DDE的分析。

基于offset BP-based算法的DDE分析在BP-based的DDE分析基础上要作一些小的修正, 在得到校验节点上的消息的PMF $Q_L^{(i)}(n)$ 后, 分别计算得到PMF的两个偏移部分:

$$Q_{L+}^{(i)}(n) = Q_L^{(i)}(n + \beta), \quad n = 1 \sim N - \beta \quad (5)$$

$$Q_{L-}^{(i)}(n) = Q_L^{(i)}(n - \beta), \quad n = -N - \beta \sim -1 \quad (6)$$

因此

$$Q_L^{(i)}(n) = Q_{L+}^{(i)}(n) + Q_{L-}^{(i)}(n), \quad n = -N \sim N \quad (7)$$

其中偏移参数 $\beta$ 取整数。

基于offset BP-based译码算法的DDE分析步骤简述如下:

(1) 首先得到初始译码消息的PMF $Q_L^{(0)}$ 及 $P_Z^{(0)}$ , 关于初始译码消息的PMF下文有具体的说明。

(2) 根据 $P_Z^{(0)}$ 得到累积分布函数 $C_L(n)$ , 具体公式及推导可参见文献[9]。

(3) 利用 $C_L(n)$ 由式(3)可以先得到 $Q_L^{(i)}(n)$ , 再利用式(5)和式(6)进行修正得到对应offset BP-based算法的校验节点译码消息的PMF如式(7)所示。接着利用式(4)迭代得到比特节点的译码消息PMF $P_Z^{(i)}(n)$ 。

由前面3种译码算法的DDE迭代公式可见, 要在Rice信道中进行密度进化的迭代, 必须获得初始译码消息的PMF, 本文接下来分析Rice信道中初始译码消息的PMF。

## 3 Rice信道中的先验密度分析

先验密度即译码初始消息的概率密度函数是DDE分析的关键, 它体现了译码算法和信道的特点, 文中采用了BP和BP-based两种译码算法分析译码消息的先验密度, offset BP-based算法是BP-based算法的改进算法, 译码消息的先验密度与之相同, 只是在迭代的过程中对PMF进行偏移修正。

Rice信道满足的密度进化分析中信道对称性条件及相关证明可参见文献[11]。

当数据符号  $x \in \{1, 0\}$  且等概时, 经  $w=1-2x$  映射后进行 BPSK 调制, 后面的分析中均采用这种调制方案, 则 Rice 信道解调器输出分布为

$$p(y/w, a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{(y-wa)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (8)$$

其中  $y$  为信道输出,  $a$  为归一化 Rice 信道衰落系数,  $E\{a^2\}=1$ , 相应的衰落系数概率密度函数为

$$p(a) = 2a(1+\gamma)\exp(-a^2(1+\gamma))I_0(2a\sqrt{\gamma(1+\gamma)}) \quad (9)$$

$\gamma$  为信道的直射能量和散射能量的比率,  $I_0(\cdot)$  为第一类零阶修正贝塞尔函数<sup>[11]</sup>。

文献[2]指出在对称性假设的条件下, 译码错误独立于所传输的码字, 不失一般性, 设发送的是全零码字, 映射到信号点  $w$  全为 1。BP 算法的初始消息条件密度函数:

$$p(q_0/a) = \frac{\sigma}{2a\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(q_0-2a^2/\sigma^2)^2}{2(4a^2/\sigma^2)}\right] \quad (10)$$

其中对数似然比形式的初始消息  $q_0 = (2/\sigma^2)y \cdot a$ , 译码消息的条件概率密度函数服从  $N(2a^2/\sigma^2, 4a^2/\sigma^2)$ 。

BP-based 算法的对数似然比形式的译码初始消息, 直接取自信道输出即  $q_0=y$ , 因此得到译码的初始消息条件密度函数为

$$p(q_0/a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{(q_0-a)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (11)$$

式(11)对  $a$  积分有初始消息对应的密度函数为

$$\begin{aligned} p(q_0) &= \int_0^\infty p(q_0/a)p(a)da \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{(q_0-a)^2}{2\sigma^2}\right] p(a)da \end{aligned} \quad (12)$$

式中  $p(a)$  如式(9)所示。此处需要说明的是, Rayleigh 信道可以看作是 Rice 信道的特例。在  $\gamma=0$  时, Rice 信道即退化为 Rayleigh 信道, 衰落系数  $a$  的密度函数形式变为

$$p(a) = 2a(1+0)\exp(-a^2)I_0(0) = 2a\exp(-a^2) \quad (13)$$

即成为 Rayleigh 衰落信道的衰落系数概率密度函数形式。

得到了 Rice 信道下的先验密度之后, 即可以进行 DDE 的迭代。在采用 DDE 对于 Rice 信道中的 LDPC 码进行分析时, 门限值是最为重要的参数, 接下来给出门限值的重要特性及其具体计算步骤。

#### 4 Rice 信道中的 LDPC 码门限

LDPC 码有个重要特性, 即存在着“门限(threshold)”现象<sup>[10]</sup>, 这个门限值是评价码性能好坏的重要参数。门限可定义为在选择某种 message-passing 译码的假设条件下, 对于给定的  $(\lambda, \rho)$  存在某个门限值  $\sigma^*$ , 它具有以下特性:

$$\sigma^* = \sup\left\{\sigma: \lim_{l \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} P_b \rightarrow 0\right\} \quad (14)$$

即当信道噪声参数低于特定码集的门限值时, 该码集中的几乎任何一种码的误比特率  $P_b$  都将随着迭代次数  $l$  或码长  $n$  的增

加而指数递减, 最终趋于零; 反之, 码集中的码的误比特率将始终大于某个正常数。

设计好的逼近容量的非正则 LDPC 码, 就是要在一定的约束条件下, 寻找能使  $\sigma^*$  最大(指信道参数最大)的  $(\lambda, \rho)$ 。

求解门限值的具体算法步骤为

(1)初始化各个参数: 最大迭代次数 max\_iter, 信道参数  $\sigma$  以及变化步长  $\Delta\sigma$ , 次数分布对  $\lambda(x), \rho(x)$ , 目标差错率 targetPe。

(2)根据信道参数  $\sigma$  得到先验密度, 迭代次数设为 iter=1。

(3)得到了先验密度以后, 进行离散密度进化 DDE 迭代, 得到迭代 iter 次后比特节点译码消息的 PMF:  $P_z^{\text{iter}}$ , 由此计算差错概率  $P_e = \int_{-\infty}^0 P_z^{\text{iter}}(x)dx$  (不妨设发送的是全零码, 调制后则  $\{0, 1\}$  映射为  $\{1, -1\}$ ), 与目标值 targetPe 比较; 如果  $P_e < \text{targetPe}$ , 则  $\sigma = \sigma + \Delta\sigma$ , 转(2), 否则迭代次数 iter=iter+1。

(4)如果 iter < max\_iter, 转(3), 否则取门限值 threshold =  $\sigma - \Delta\sigma$ 。

### 5 数值仿真及结果分析

#### 5.1 先验密度曲线

图 1 所示为译码消息的先验密度曲线, 图 1(a)为采用 BP 算法时参数  $\gamma$  ( $\gamma=0, 10, 20$ ) 变化时的 PMF,  $\sigma$  均取 0.60; 图 1 (b)为采用 BP-based 算法, 信道噪声方差  $\sigma$  ( $\sigma=0.3, 0.5, 0.8$ ) 变化时的 PMF,  $\gamma$  均取 10。

图 1 (a)中, 虚线所示为  $\gamma=0$  即 Rice 信道退化为 Rayleigh 信道时的 PMF 曲线, 点线和点划线所示分别为参数  $\gamma=10, 20$  时的 PMF 曲线。Rayleigh 信道的情况下 PMF 曲线有个尖锐的峰值, 随着参数  $\gamma$  的增加, PMF 曲线可以近似看作 Gauss 分布。由图 1(b)可见, 虚线、点线和点划线分别表示了信道噪声参数  $\sigma$  为 0.3, 0.5 及 0.8 时的 PMF 曲线, 由于初始译码消息的条件概率密度函数  $p(q_0/a)$  服从 Gauss 分布  $N(a, \sigma)$ , 信道衰落系数  $a$  一定的情况下,  $\sigma$  值越大, 则对应的 PMF 曲线越宽。

#### 5.2 Rice 信道中正则 LDPC 码的 DDE 分析

Chen 在文献[8]中利用 DE 分析从门限值这个角度, 对

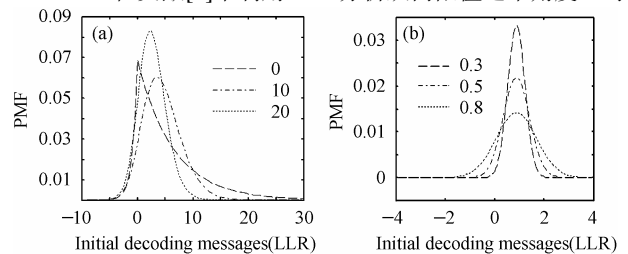


图 1 先验密度曲线

(a)  $\gamma=0, 10, 20$  对应的先验密度曲线

(b)  $\sigma=0.3, 0.5, 0.8$  对应的先验密度曲线

Fig.1 Prior Density for different  $\gamma$  and  $\sigma$

(a) A priori Density for  $\gamma=0, 10, 20$

(b) A priori Density for  $\sigma=0.3, 0.5, 0.8$

BP 译码算法, BP-based 算法及其改进算法 offset BP-based

算法等进行了比较, 结果表明 BP 译码算法的性能是最好的, 而 BP-based 算法及其改进算法以适当牺牲部分性能换取了译码复杂度的显著降低, 且更易于硬件实现。文献[4]中分析比较了译码算法的复杂度。

我们以(3,6)和(4,8)正则 LDPC 码为例, 在 Rice 信道中对 BP 算法、BP-based 算法和 offset BP-based 算法采用 DDE 分析方法得到了相应门限值, 如表 1, 表 2 所示。

表 1 为基于 BP, BP-based 算法的 DDE 分析得到的门限值  $\sigma^*$ , 量化位数  $q$  分别为 5, 6, 7 及 8, 量化步长  $\Delta$  为 0.05; 表 2 为基于 offset BP-based 算法的 DDE 分析得到的门限值, 量化位数与表 1 相同, 量化步长如表中所示, 相对应的  $\beta$  分别为  $0.15/\Delta$  ((3,6)正则码)和  $0.175/\Delta$  ((4,8)正则码)。

从表中的结果可见, 不论是(3,6)还是(4,8)正则码, BP译码算法的DDE分析得到的门限值是最优的(距离Shannon限最近), 这与Jinghu Chen<sup>[8]</sup>的结论是一致的; 而量化位数取 8 时, 对应的门限值比其它量化位数得到的值大; 并且在 8 位量化情况下基于offset BP-based的DDE分析得到的门限值要优于基于BP-based的, 这也从门限的角度说明了offset-based译码算法在几乎不增加计算复杂度的前提下, 性能确

表 1 基于 BP, BP-based 的 DDE 分析

Tab.1 DDE based on BP, BP-based algorithm

$(d_v, d_c)$	$q$	$\Delta$	$\sigma^*$ (BP)	$\sigma^*$ (BP-Based)
(3,6)	5	0.05	0.48	0.47
	6	0.05	0.45	0.38
	7	0.05	0.50	0.48
	8	0.05	0.75	0.69
(4,8)	5	0.05	0.31	0.26
	6	0.05	0.31	0.24
	7	0.05	0.45	0.40
	8	0.05	0.70	0.62

表 2 基于 offset BP-based 的 DDE 分析

Tab.2 DDE Based on offset BP-Based algorithm

实优于 BP-based 算法。

$(d_v, d_c)$	$q$	$\Delta$	$\beta$	$\sigma^*$
(3,6)	5	0.075	2	0.47
	6	0.05	3	0.38
	7	0.05	3	0.48
	8	0.05	3	0.73
	8	0.05	1	0.72
(4,8)	5	0.175	1	0.26
	6	0.175	1	0.24
	7	0.0875	2	0.38
	7	0.175	1	0.40
	8	0.0875	2	0.68
8	0.175	1	0.65	

因此基于复杂度和性能的折衷考虑, 下面我们在优化 Rice 信道中的非正则 LDPC 码结构时采用了 offset BP-based 算法的 DDE 分析得到噪声门限, 结合差分进化的优化算法给出了 Rice 信道中, 码率为 1/2 和 1/3、最大比特节点次数为 10 的优化次数分布对。

5.3 Rice 信道中基于 DDE 分析的非正则码结构优化

在offset BP-based译码算法的DDE分析基础上, 本文采用了差分进化技术<sup>[10,12,13]</sup>对Rice信道下的码结构优化进行了研究。差分进化技术是一种并行搜索技术, 算法由初始的矢量集开始, 迭代更新集合中的每一个矢量, 直至监督矢量发现最优的代价函数值。

研究表明<sup>[10,12,13]</sup>: 码结构优化时, 即使最大比特节点次数很大(如 $d_{vmax}=50$ ), 也可将大部分比特节点次数的  $\lambda_i$  置为 0, 而仅余下最高、最低比特节点次数及相邻几个和中间的少部分次数  $\lambda_i$  作为自由变量; 而校验节点一般限定取两个或者 3 个相邻的次数  $\rho_i$  作为自由变量。这样处理的目的是在理想的门限值  $\sigma^*$  与优化的计算复杂性之间寻求折衷。

因此我们在优化时作了如下限定: 1/2 码率校验节点的次数为 8 和 9( $d_{cmax}9$ ), 1/3 码率校验节点的次数为 5 和 6( $d_{cmax}=6$ ); 比特节点的次数都为 2, 3, 4, 9 及 10, 待优化变量为  $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_9, \rho_{dc \max-1}$ , 而  $\lambda_2, \lambda_{10}, \rho_{dc \max}$ , 可由式(15), 式(16)计算得到, 其中 $K=1-R$ ,  $R$ 为LDPC 码的码率。

$$\lambda_2 = 1 - \sum_{i=3}^{d_{vmax}} \lambda_i, \quad \rho_2 = 1 - \sum_{i=3}^{d_{cmax}} \rho_i \quad (15)$$

$$\lambda_{d_{vmax}} = \frac{\frac{1-K}{2} + \sum_{i=3}^{d_{cmax}} \rho_i \left( \frac{1}{i} - \frac{1}{2} \right) - K \sum_{i=3}^{d_{vmax}-1} \lambda_i \left( \frac{1}{i} - \frac{1}{2} \right)}{K \left( \frac{1}{d_{vmax}} - \frac{1}{2} \right)} \quad (16)$$

优化中对于节点次数的这种限定很大程度上加快了优化迭代计算的速度, 在优化速度和性能上可取得很好的折衷, 具体算法步骤可参考 Hou 在文献[10]中的描述。

优化时采用了 offset BP-based 译码算法基础上的离散密度进化来获得噪声门限值, 目标误比特率定为  $1e-5$ , 每个码结构进行 100 次密度进化的迭代, Rice 信道中的参数  $\gamma=10$ 。

表 3 给出了最大比特节点次数 $d_{vmax}=10$  时的优化结果, 同时给出了对应的门限值, 表 3 中Rice信道的Shannon限可参见文献[11], DDE分析中的参数设置为: 量化步长  $\Delta=0.05$ , 量化比特数 $q=8$ ; 码率 $R=1/2$  时, 偏移量  $\beta=3$ ; 码率为 1/3 时, 偏移量  $\beta=5$ 。

门限值的两种表示有换算关系<sup>[10]</sup>,  $(E_b/N_0)_{dB} = -10\lg(2R) - 20\lg(\text{threshold})$ ,  $R$  为 LDPC 码的码率。

表 3 优化次数分布对及相应的门限值

Tab.3 Optimized degree distribution pairs and the thresholds

码率	香农限	门限值	比特节点次数分布 $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_9, \lambda_{10}$	校验节点次数分布
1/2	0.4704dB	2.0475dB(0.7900)	[0.2017, 0.1431, 0.2003, 0.1254, 0.3295]	[0.8379, 0.1621] ( $\rho_8, \rho_9$ )
1/3	-0.3226dB	1.4202dB(1.0400)	[0.0268, 0.6788, 0.0457, 0.2475, 0.0012]	[0.5741, 0.4259] ( $\rho_5, \rho_6$ )

为了进一步说明优化方案的有效性, 图 2 比较了表 3 中

的优化码结构与Hou在文献[10]中Rayleigh信道下优化得到

的码结构( $d_{vmax}=10; R=1/2,1/3$ ), 给出了两者在Rice信道下误比特率随迭代次数变化的性能曲线。图 2(a)为码率 $R=1/2$  的两种码结构在Rice信道下误比特率与迭代次数的关系曲线, Rice信道  $\sigma=0.68$ ; 图 2(b)为码率 $R=1/3$  的情况, Rice信道  $\sigma=0.85$ 。图 2 中小方框显示的是Rice信道中的优化码结构即表 3 中的次数分布对的性能, 小三角显示的是Hou在文献[10]中Rayleigh信道下的优化码结构的性能。在最大迭代 20 次的情况下, 表 3 中的码结构在Rice信道中的误比特率性能明显优于Hou的码结构在Rice信道中的性能, 如图 2(b)中迭代 16 次后表 3 中的码结构误比特率即下降到  $1e-4$  左右, 而Hou的码结构在最大迭代次数后误比特率仍在  $1e-2$  左右。

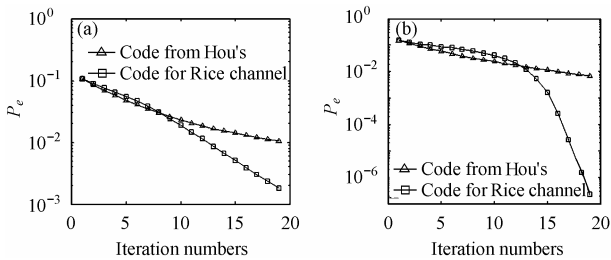


图 2 表 3 中码结构与文献[10]中的码结构性能比较  
(a)  $R=1/2$  时性能比较 (b)  $R=1/3$  时性能比较

Fig.2 Performance comparison for code in Tab.3 and in Ref.[10]  
(a) Performance comparison for  $R=1/2$   
(b) Performance comparison for  $R=1/3$

5.4 Rice 信道下优化的非正则 LDPC 码密度进化曲线

为更进一步直观表示 DDE 分析下 LDPC 码的噪声门限特性, 图 3 给出了非正则 LDPC 码基于 offset BP\_based 译码算法译码消息的 PMF 进化曲线, 仿真中采用了表 3 中  $R=1/2$  时的优化次数分布对, 门限值为  $\sigma^* = 0.79$ 。在图 3(a)和图 3(b)中 Rice 信道的  $\sigma$  分别取 0.78 和 0.85。

由图 3 可见,  $\sigma < 0.79$  时, 从 3, 6, 9 步迭代中就可以看出向正方向进化的趋势, 即迭代有收敛的趋势, 而在图 3(b)中, 信道参数  $\sigma > 0.79$  时, 译码消息的 PMF 并没有向正方向进化的趋势, 而是停滞不动了, 即迭代不能收敛。这个结果验证了“门限”现象, 即要保证差错概率低于目标概率, 必须

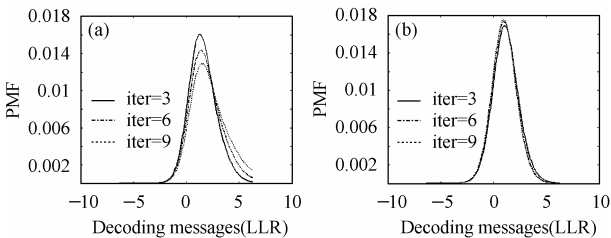


图 3 Rice 信道下 1/2 码率非正则码 PMF 进化  
(a) 信道噪声参数  $\sigma=0.78$  (b) 信道噪声参数  $\sigma=0.85$

Fig.3 PMF evolution of irregular LDPC codes with rate 1/2 over rice channel

(a) Noise parameter of Rice channel  $\sigma=0.78$   
(b) Noise parameter of Rice channel  $\sigma=0.85$

使得信道噪声参数低于LDPC码的噪声门限。此外还可以看出进化曲线近似为 Gauss 分布, 这个结果对于基于 offset

BP\_based算法的DDE分析有着重要的启发意义, 可以考虑将 GA分析<sup>[14]</sup>引入到DDE分析中。

6 结束语

LDPC 码译码消息的先验密度是 DDE 分析的关键之一, 它体现了译码算法和信道的特点, 由此入手, 我们首先分析了 Rice 信道下译码消息的先验密度。

接着以 Rice 信道下正则 LDPC 码为例, 通过对 3 种译码算法的 DDE 分析表明, BP 译码算法的性能是最好的, 而 BP-based 算法及其改进算法以适当牺牲部分性能换取了译码复杂度的显著降低, 且更易于硬件实现。从仿真结果中还可可见, 量化位数和量化步长均会影响码集的噪声门限, 但这种影响呈现出一种较复杂的关系: 随着量化位数的增加或量化步长的减少, 噪声门限虽有局部起伏, 但总的趋势是有所上升。

给定信道类型下LDPC码的噪声门限大小既是评价某种译码算法性能的依据, 也是通过寻找尽可能大的噪声门限来优化LDPC码结构的重要途径。在offset BP\_based译码算法的DDE分析基础上结合差分进化算法, 给出了Rice信道下非正则LDPC码 1/2, 1/3 码率的优化次数分布对及相应的噪声门限值; 限于计算工作量, 作者只选择了最大比特节点次数  $d_{vmax}=10$  作为优化次数分布对的例子。采用“粒子群体优化 (Particle Swarm Optimization, PSO)算法”进行码结构优化等在进一步的研究中。LDPC码在其它信道如ISI信道、部分响应信道等的密度进化研究也已经有所开展<sup>[15, 16]</sup>。

参考文献

- [1] Gallager R G. Low-density parity-check codes[J]. *IRE Trans. on Info. Theory*, 1962, 8(1): 21–28.
- [2] Richardson T J, Urbanke R L. The capacity of low-density parity-check codes under message-passing decoding [J]. *IEEE Trans. on Info. Theory*, 2001, 47(2): 599–618.
- [3] Mackay D J C. Good error-correcting codes based on very sparse matrices[J]. *IEEE Trans.on Info. Theory*, 1999, 45(3): 399–431.
- [4] Fossorier M, Mihaljevic M, Imai H. Reduced complexity iterative decoding of low density parity check codes based on belief propagation[J]. *IEEE Trans. on Communications*, 1999, 47(5): 673–680.
- [5] Wei X, Akansu A N. Density evolution for low density parity check coeds under Max-Log-MAP decoding[J]. *Electronics Letters*, 2001, 37(18): 1125–1126.
- [6] 贺玉成, 杨莉, 王新梅, et al.. 置信传播算法的性能测度[J]. *电子学报*, 2002, 30(4): 577–580.
- [7] Chung S Y, Forney J G D, Richardson T J, et al.. On the design of low-density parity-check codes within 0.0045dB of the Shannon limit[J]. *IEEE Communications. Letters*, 2001, 5(2): 58–60.
- [8] Chen J H, Fossorier M. Density evolution for two improved BP-based decoding algorithms of LDPC codes[J]. *IEEE*

- Communications Letters*, 2002, 6(5): 208–210.
- [9] Chen J H, Fosserier M. Density evolution for BP-based decoding algorithm of LDPC codes and their quantized versions[C]. IEEE Global Telecommunications Conference, Taipei, Nov. 2002, 2: 1378–1382.
- [10] Hou J L, Siegel P H, Milstein B. Performance analysis and optimization of low density parity check codes on Rayleigh channels[J]. *IEEE J. on Selected Area in Communication*, 2001, 19(5): 924–934.
- [11] 林家儒, 吴伟陵. LDPC 码在 RICE 信道中的性能分析[J]. 北京: 北京邮电大学学报, 2004, 27(2): 48–53.
- [12] Shokrollahi A, Storn R. Design of efficient erasure codes with differential evolution[C]. In Proc. IEEE Int. Symp. Information Theory, Sorrento, Italy, June 2000: 5.
- [13] Storn R, Price K. Differential evolution—A simple and efficient heuristic adaptive scheme for global optimization over continuous spaces[J]. *J. Global Optimization*, 1997, 11(2): 341–359.
- gaussian approximation[J]. *IEEE Trans. on Info. Theory*, 2001, 47(2): 657–670.
- [15] Kavcic A, Ma X, Mitzenmacher M. Binary intersymbol Interference channels: Gallager codes, density evolution, and code performance bounds[J]. *IEEE Trans. on Info. Theory*, 2003, 49(7): 1636–1652.
- [16] Tan W J, Cruz J R. Performance evaluation of low-density parity-check codes on partial-response channels using density evolution[J]. *IEEE Trans. on Communications*, 2004, 52(8): 1253–1256.
- 徐 华: 男, 1975 年生, 博士生, 研究方向为 LDPC 码及相关应用.
- 徐澄圻: 男, 1942 年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为高效传输、纠错编码等现代通信中信号与信息处理的相关理论与应用研究.
- [14] Chung S Y, Richardson T J, Urbanke R L. Analysis of sum-product decoding of low-density parity-check codes using a