

浅槽波导的场分布计算*

周文表

(中国科学院电子学研究所)

提 要

本文用韦伯-夏夫海特林积分来表示半无限空间的场分量,并进而应用场匹配法计算了浅槽波导的电磁场分布特性.给出了典型的数值例子,从而得到浅槽波导场分布的清晰图形.

一、引 言

浅槽波导(图1(a))在行波天线工程中得到了广泛应用.但长期以来,对其传播常数和场分布缺乏较严格的分析.通常用侧壁伸展到无限远的深槽波导(图1(b))的传播常数来近似表示浅槽波导的传播常数^[1].正如文献[2]指出的,在许多情况下常引起较大的误差.文献[2]根据表面阻抗的概念,提出了分析浅槽波导传播常数的方法,但是该方法对于半无限空间的场分布不能给出任何信息.本文则利用韦伯-夏夫海特林不连续积分来表示半无限空间的场分量,并应用场匹配法得出了浅槽波导的电磁场分布特性.

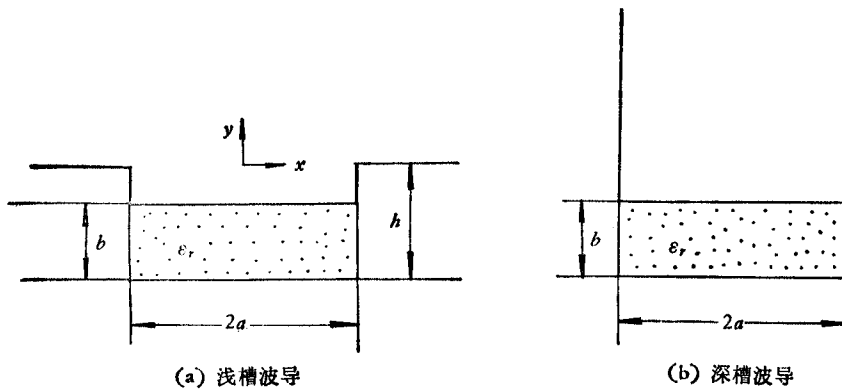


图1 浅槽和深槽波导的示意图

二、分析方法

1. 浅槽内的场 浅槽内的场可由矢量位 $\mathbf{A} = \mathbf{a}_y \phi$ 从下式求出:

* 1983年3月11日收到,1983年9月15日修改定稿.

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} + \frac{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})}{j\omega\mu_0\epsilon_0\epsilon_r}, \quad (1)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\nabla \times \mathbf{A}}{\mu_0}, \quad (2)$$

式中

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos k_{yn}(y+b) \cos \left[\frac{n\pi}{2a}(a-x) \right]. \quad (3)$$

为简略起见, (1)–(3) 式中省略了因子 $\exp(j\omega t - j\beta z)$, β 是 z 方向的传播常数; k_{yn} 是 y 方向的波数, 并由下式决定:

$$k_{yn} = \left[\epsilon_r k_0^2 - \beta^2 - \left(\frac{n\pi}{2a} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (4)$$

式中, k_0 是自由空间的波数.

2. 半无限空间 ($y > 0$) 的场 在 $y > 0$ 的半无限空间, 各电磁场分量可由 E_y 分量导出. 而 E_y 满足下列波动方程:

$$\nabla^2 E_y + k_0^2 E_y = 0. \quad (5)$$

其特解为:

$$\left(\frac{\pi k_x x}{2} \right)^{1/2} J_{\pm 1/2}(k_x x) \exp(-y \sqrt{k_x^2 + \beta^2 - k_0^2}),$$

式中, $J_{\pm 1/2}(k_x x)$ 是宗量为 $k_x x$ 的 1/2 阶贝塞尔函数, k_x 是 x 方向的波数. 若注意到 $\sqrt{x} J_{\pm 1/2}(k_x x)$ 是简谐函数, 则可知它们是 (5) 式的解. 引入归一化无量纲变量 $\rho = \frac{x}{a}$,

并令 $\xi = k_x a$ 和 $K = \sqrt{\beta^2 - k_0^2} a$, 则电场 E_y 可表示为:

$$E_y = \sqrt{\rho} \int_0^{\infty} [C(\xi) J_{-1/2}(\rho\xi) + D(\xi) J_{1/2}(\rho\xi)] \xi^{1/2} \exp\left(-\frac{y}{a} \sqrt{\xi^2 + K^2}\right) d\xi. \quad (6)$$

因而

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial y} &= -\sqrt{\rho} \frac{\sqrt{\xi^2 + K^2}}{a} \int_0^{\infty} [C(\xi) J_{-1/2}(\rho\xi) + D(\xi) J_{1/2}(\rho\xi)] \xi^{1/2} \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{y}{a} \sqrt{\xi^2 + K^2}\right) d\xi. \end{aligned} \quad (7)$$

在 $y = 0$ 平面内, 当 $|\rho| > 1$ 时, 半无限空间的切向电场 E_x 和 E_z 必须满足边界条件 $E_x|_{\rho>1} = 0$, 和 $E_z|_{\rho>1} = 0$. 这要求在 $y = 0$ 和 $|\rho| > 1$ 时, $\frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$. 为了满足上述边界条件, 我们应用由下式定义的韦伯-夏夫海特林积分^[3]:

$$u(\lambda, \mu, \nu; x) = x^{-\frac{\mu}{2}} \int_0^{\infty} \frac{J_{\mu}(\sqrt{x}\xi) J_{\nu}(\xi)}{\xi^{\lambda}} d\xi$$

$$= \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1-\lambda}{2}\right)}{2^{\lambda}\Gamma(\mu+1)\Gamma\left(\frac{\lambda+\nu+1-\mu}{2}\right)} F\left(\frac{\mu+\nu+1-\lambda}{2}, \frac{\mu+1-\lambda-\nu}{2}, \mu+1; \lambda\right); & x < 1; \\ \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1-\lambda}{2}\right)x^{-(\mu+\nu+1-\lambda)/2}}{2^{\lambda}\Gamma(\nu+1)\Gamma\left(\frac{\lambda+\mu+1-\nu}{2}\right)} F\left(\frac{\mu+\nu+1-\lambda}{2}, \frac{\nu+1-\lambda-\mu}{2}, \nu+1; \frac{1}{x}\right); & x > 1; \end{cases} \quad (8)$$

式中, $\Gamma(x)$ 和 $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ 分别是伽玛函数和高斯超几何函数. μ, ν, λ 必须满足下列条件:

$$\mu + \nu + 1 > \lambda > -1.$$

当 $(\lambda + \mu + 1 - \nu)/2$ 为零或负整数和 $x > 1$ 时, 由伽玛函数的性质可知, 函数 $u(\lambda, \mu, \nu; x)$ 恒等于零. 因此假若我们选取系数 $C(\xi)$ 和 $D(\xi)$ 为:

$$C(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \frac{J_{2m+1}(\xi)}{\xi\sqrt{\xi^2 + K^2}} \quad \text{和} \quad D(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} D_m \frac{J_{2m+2}(\xi)}{\xi\sqrt{\xi^2 + K^2}}, \quad (9)$$

则 $y = 0, |\rho| > 1$ 时的边界条件自动满足. 这时 y 方向电场分量 E_y 为:

$$E_y = \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{\rho} \int_0^{\infty} \frac{C_m J_{-1/2}(\rho\xi) J_{2m+1}(\xi) + D_m J_{1/2}(\rho\xi) J_{2m+2}(\xi)}{\xi^{1/2} \sqrt{\xi^2 + K^2}} \exp\left(-\frac{y}{a} \sqrt{\xi^2 + K^2}\right) d\xi. \quad (10)$$

在(9)式、(10)式中, C_m 和 D_m 是展开系数, 可由下面讨论的 $y = 0, |\rho| < 1$ 区域的场匹配来求出.

3. 开槽处场的匹配 由匹配 $y = 0, |\rho| < 1$ 处的切向电场和磁场分量, 可得下列方程:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_{y_n} b) \frac{k_{y_n}}{\epsilon_r} \left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos\left[\frac{n\pi}{2}(1-\rho)\right] \\ &= -\frac{1}{2a\sqrt{\rho}} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} [C_m J_{-1/2}(\rho\xi) J_{2m+1}(\xi) + D_m J_{1/2}(\rho\xi) J_{2m+2}(\xi)] \xi^{-1/2} d\xi \\ & \quad - \frac{\sqrt{\rho}}{a} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} [C_m J_{-1/2}(\rho\xi) J_{2m+1}(\xi) + D_m J_{1/2}(\rho\xi) J_{2m+2}(\xi)] \xi^{1/2} d\xi, \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{k_{y_n}}{\epsilon_r} \cos(k_{y_n} b) \sin\left[\frac{n\pi}{2}(1-\rho)\right] \\ &= \frac{\sqrt{\rho}}{a} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} [C_m J_{-1/2}(\rho\xi) J_{2m+1}(\xi) + D_m J_{1/2}(\rho\xi) J_{2m+2}(\xi)] \xi^{-1/2} d\xi, \quad (12) \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(k_{y_n} b) \sin\left[\frac{n\pi}{2}(1-\rho)\right]$$

$$= \sqrt{\rho} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{[C_m J_{-1/2}(\rho\xi) J_{2m+1}(\xi) + D_m J_{1/2}(\rho\xi) J_{2m+2}(\xi)] \xi^{-1/2}}{\sqrt{\xi^2 + K^2}} d\xi, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{n\pi}{2} \right) \cos(k_{y_n} b) \cos \left[\frac{n\pi}{2} (1 - \rho) \right] \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{\rho}} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{[C_m J_{-1/2}(\rho\xi) J_{2m+1}(\xi) + D_m J_{1/2}(\rho\xi) J_{2m+2}(\xi)] \xi^{-1/2}}{\sqrt{\xi^2 + K^2}} d\xi \\ & \quad - \sqrt{\rho} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{[C_m J'_{-1/2}(\rho\xi) J_{2m+1}(\xi) + D_m J'_{1/2}(\rho\xi) J_{2m+2}(\xi)] \xi^{1/2}}{\sqrt{\xi^2 + K^2}} d\xi. \quad (14) \end{aligned}$$

对任意的 $|\rho| < 1$, (11)–(14) 式均应满足, 因而这些方程可分为两组, 一组包含 ρ 的奇函数, 另一组只包含 ρ 的偶函数. 然后将变数为 ρ 的三角函数和贝塞尔函数作雅可毕多项式级数展开(见附录).

由雅可毕多项式的正交性, 可由上述包含 ρ 的两组方程式得出决定系数 C_m 和 D_m 的联立方程组:

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_{2m+1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(-1)^m}{(2m+1)} J_{2l+1} \left(\frac{2m+1}{2} \pi \right) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m K(2m+1, 2l+1), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m+1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (-1)^m \frac{\cos(k_{y_{2m+1}} b)}{(2m+1)} J_{2l+1} \left(\frac{2m+1}{2} \pi \right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} C_m G(2m+1, 2l+1), \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m+1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (-1)^m \frac{k_{y_{2m+1}} a \sin(k_{y_{2m+1}} b)}{\varepsilon_r} J_{2l+2} \left(\frac{2m+1}{2} \pi \right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} C_m L(2m+1, 2l+2), \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m+1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (-1)^m \cos(k_{y_{2m+1}} b) J_{2l+2} \left(\frac{2m+1}{2} \pi \right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} C_m P(2m+1, 2l+2). \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m+2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (-1)^m \frac{k_{y_{2m+2}} a \sin(k_{y_{2m+2}} b)}{\varepsilon_r (2m+2)} J_{2l+2} [(m+1)\pi] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} D_m K(2m+2, 2l+2), \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m+2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (-1)^m \frac{\cos(k_{y_{2m+2}} b)}{(2m+2)} J_{2l+2} [(m+1)\pi] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} D_m G(2m+2, 2l+2), \quad (20) \end{aligned}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_{2m+2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (-1)^m J_{2l+1}[(m+1)\pi] = \sum_{m=0}^{\infty} D_m L(2m+2, 2l+1), \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m+2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (-1)^m \cos(k_{y2m+2}b) J_{2l+1}[(m+1)\pi] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} D_m P(2m+2, 2l+1), \end{aligned} \quad (22)$$

式中, $l = 0, 1, 2 \dots \infty$, $K(m, n)$, $G(m, n)$, $L(m, n)$ 和 $P(m, n)$ 分别由下列积分式确定:

$$K(m, n) = \int_0^{\infty} \frac{J_m(\xi) J_n'(\xi)}{\xi^2} d\xi, \quad (23)$$

$$G(m, n) = \int_0^{\infty} \frac{J_m(\xi) J_n(\xi)}{\xi^2 \sqrt{\xi^2 + K^2}} d\xi, \quad (24)$$

$$L(m, n) = \int_0^{\infty} \frac{J_m(\xi) J_n(\xi)}{\xi} d\xi, \quad (25)$$

$$P(m, n) = \int_0^{\infty} \frac{J_m(\xi) J_n(\xi)}{\xi \sqrt{\xi^2 + K^2}} d\xi. \quad (26)$$

因为传播常数 β 和 k_{yn} 可用文献 [2, 4] 的方法求出, 且可消去 A_n , 因此联立 (15)–(22) 式可求出系数 C_m 及 D_m . 然后由 (10) 式可计算半无限空间的电磁场分布.

三、数值结果

在下列数值结果中, 对于介质区域的场, 我们只考虑主模式的 E_{00} 模式. 对于一个特定的结构, 图 2 给出了半无限空间中归一化电场分量 E_y 和 E_x 的分布. 由图可知, 在 $y = 0$ 和 $|\rho| > 1$ 时, 边界条件 $E_x = 0$ 是满足的. 并且可见, 在 $|\rho| > 1$ 的区域内, 归一化场强小于 25%.

图 3 分别给出了场分量 E_y 和 E_x 在 y 方向的衰减情况, 从图也可看出, 电场分量 E_y 和 E_x 的相对大小, 可见比起 E_y 分量来, E_x 分量是很小的.

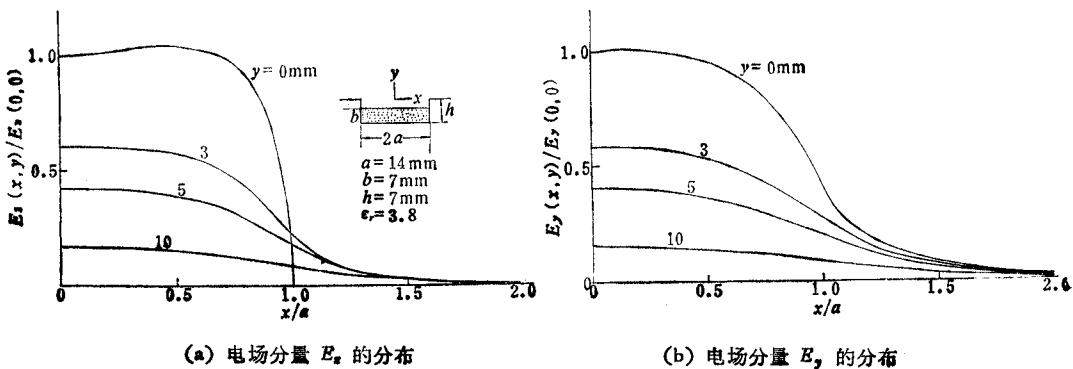


图 2

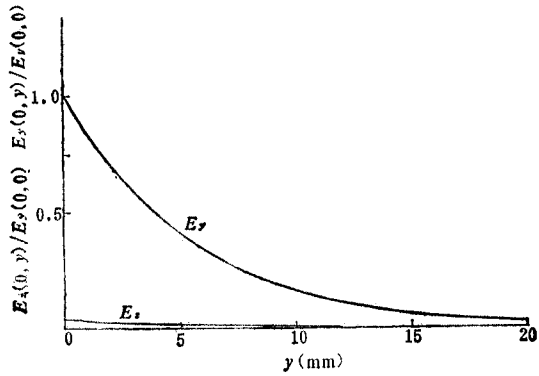
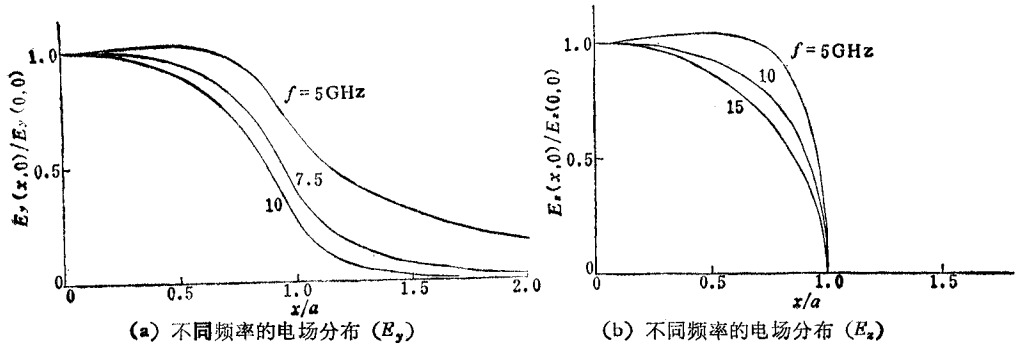


图3 电场分量 E_y 和 E_x 的 y 方向衰减特性



(a) 不同频率的电场分布 (E_y)

(b) 不同频率的电场分布 (E_x)

图4

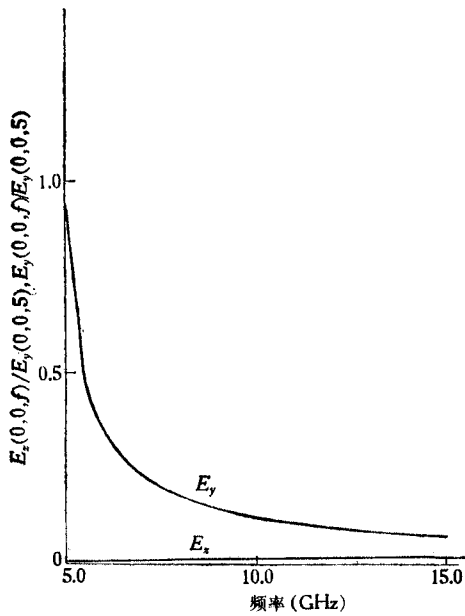


图5 场分量 $E_y(0,0)$ 和 $E_x(0,0)$ 随频率的变化

图4分别给出了不同频率下,电场分量 E_y 和 E_x 的分布情况。可见频率越高,集中于中心部分的能量越多。

图5给出了当浅槽传输同样的功率时,场分量 $E_y(0,0)$ 和 $E_x(0,0)$ 随频率的变

化。可见频率越低上半平面的场强将越强。从图也可看出,随着频率升高, E_y 分量迅速减小,但 E_z 分量则略有增大。

四、结 论

本文根据韦伯-夏夫海特林积分和场匹配法提出了计算浅槽波导场分布的方法。给出了若干数值结果。由此得出了浅槽波导场分布的清晰图形。为其用作天线元件时,提供了选择结构尺寸的依据。所用的计算机程序不仅可计算场分布,还可计算传播常数 β 。

附 录

雅可毕多项式定义为:

$$\begin{aligned} v_n^m(x) &= x^{\frac{m}{2}} \int_0^\infty \sqrt{\xi} J_m(\sqrt{x\xi}) J_{m+2n+\frac{3}{2}}(\xi) d\xi \\ &= \frac{\sqrt{2} \Gamma\left(m+n+\frac{3}{2}\right)}{n! \Gamma(m+n+1)} x^{-m} (1-x)^{-1/2} \frac{d^n}{dx^n} [x^{m+n} (1-x)^{n+\frac{1}{2}}] \\ &= \frac{\sqrt{2} \Gamma\left(m+n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(n+1) \Gamma(m+1)} F\left(n+m+\frac{3}{2}, -n, m+1; x\right). \end{aligned}$$

雅可毕多项式的正交性:

$$\int_0^1 v_n^m(x) v_{n'}^m(x) x^m (1-x)^{1/2} dx = \begin{cases} 0, & n \neq n'; \\ N_n, & n = n'. \end{cases}$$

式中,

$$N_n = \frac{2\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(m+n+\frac{3}{2}\right)}{(2m+4n+3)\Gamma(n+1)\Gamma(n+m+1)}.$$

函数 $f(x)$ 的雅可毕多项式展开:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n^m(x),$$

式中,

$$a_n = \frac{1}{N_n} \int_0^1 f(x) v_n^m(x) x^m (1-x)^{1/2} dx.$$

贝塞尔函数 $J_m(p\sqrt{x})$ 的雅可毕展开式:

$$J_m(p\sqrt{x}) = x^{m/2} \sum_{l=0}^{\infty} (2m+4l+3) \frac{J_{m+2l+3/2}(p)}{p^{3/2}} v_l^m(x).$$

正弦函数 $\sin(px)$ 的雅可毕展开式:

$$\sin(px) = \sqrt{\frac{p\pi}{2}} x \sum_{l=0}^{\infty} (4l+4) \frac{J_{2l+2}(p)}{p^{3/2}} v_l^{1/2}(x^2).$$

余弦函数 $\cos(px)$ 的雅可毕展开式:

$$\cos(px) = \sqrt{\frac{p\pi}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} (4l+2) \frac{J_{2l+1}(p)}{p^{3/2}} v_l^{-1/2}(x^2).$$

参 考 文 献

- [1] C. H. Walter, *Traveling Wave Antenna*, McGraw-Hill Inc., New York, 1965, pp. 225.
- [2] 金木利之, 电子通信学会论文誌, **J59-B**(1976), 211.
- [3] Y. L. Luke, *Integrals of Bessel Functions*, McGraw-Hill Inc., New York, 1962, pp. 324—326.
- [4] W. B. Zhou and T. Itoh, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-30**(1982), 2163.

FIELD DISTRIBUTION IN CHANNEL GUIDE

Zhou Wenbiao

(*Institute of Electronics, Academia Sinica*)

A new method is presented to calculate the field distribution in the channel guide using Weber-Schafheitlin integral and field matching method. Some numerical results are given for several cases. Thus we can get a clear view about the field distribution in the channel guide.