

# 基于杂波协方差矩阵特征向量分析的 STAP 降维方法的性能分析<sup>1</sup>

吴德新

(深圳职业技术学院 深圳 518055)

**摘 要** 本文首先讨论了降维 AMF-CFAR 检测的性能与降维变换矩阵的关系, 并提出了一种新的降维时空二维自适应算法 (IV-STAP), 其次, 在有幅相误差的条件下就 IV-STAP、3B-4D-STAP、3DT-SAP 和全维自适应的信杂噪比输出及检测概率做了比较。

**关键词** 机载雷达, 时空二维自适应信号处理, 杂波抑制  
**中图分类号** TN951

## 1 引 言

传统机载雷达下视时地海杂波的干扰问题一直没有得到很好地解决。相控阵雷达的广泛使用使得阵列信号的自适应处理成为解决该问题的一个新途径。七十年代 I. S. Reed, J. D. Mallett 和 L. E. Brennan 提出了时空二维自适应信号处理 (STAP) 的 RMB 算法<sup>[1,2]</sup>。此后又有人提出了具有恒虚警率 (CFAR) 的广义似然比检测 (GLRT)<sup>[3]</sup> 及 AMF-CFAR<sup>[4,5]</sup> 算法。然而, 上述算法做全维自适应处理时对训练样本容量及设备的复杂程度有很高的要求<sup>[2-5]</sup>。为此人们把目光转向降维 STAP。当前一类常用的降维措施是根据理想杂波谱图及导引向量位置来选取降维波束 (降维变换矩阵)。R. Klein 开此类降维 STAP 之先河, 首先提出的辅助通道法<sup>[6]</sup>。这类方法中常见的还有 Wang Hong 提出的  $\Sigma\Delta$ -STAP, JDL-STAP<sup>[7]</sup>, 和保铮等人提出的 mDT-SAP、mB-nD-STAP<sup>[8]</sup>。这些方法可靠、直观且降维效果明显。但这类方法在实际降维过程中会引起较大的输出信杂噪比损失。

就数学本质而言, 上述降维的核心不过是从张成方位余弦、Doppler 频率平面的二维离散傅氏基中选取数个向量以构成一子空间并使得期望的信号在该子空间内的信杂噪比尽可能地大些。但是在方位余弦、Doppler 频率平面内还有其它的基。事实上, 可以杂波协方差矩阵的特征向量做这个基, 并从这组基中选出数个向量对时空快拍进行降维处理。本文提出一种基于杂波协方差矩阵特征向量分解的降维 STAP 算法, 为方便计不妨称其为 IV-STAP。

本文第 2、3 两节讨论了在杂波协方差矩阵已知和未知条件下匹配滤波及自适应匹配滤波的输出信杂噪比同检测概率的关系, 第 4 节在有幅相误差的条件下就 IV-STAP 及其它降维方法的输出信杂噪比、检测概率做一比较。本文中假设天线为正侧面线阵, 其参数如表 1 所列。

表 1

|   |  |
|---|--|
| 发射阵为 25 个阵元的 Chebyshev 加权均匀线阵                       | 脉冲重复频率 $f_R (=2765\text{Hz})$ , 脉冲重复周期 $T = 1/f_R$ |
| 接收阵是阵元数为 $L (=25)$ 的均匀线阵                            | 主波束方位角 $\alpha (= \pi/2)$                          |
| 脉冲数 $M (=12)$                                       | 杂噪比 (CNR) = 60dB                                   |
| 相邻阵元间间距为 $\lambda/2$ , $\lambda (=0.3\text{m})$ 为波长 | 单个阵元输入信杂噪比 (SINR <sub>in</sub> ) = 0dB             |
| 载机速度 $V (=200\text{m/s})$ , $V$ 的方向同天线轴向            | 波束俯仰角为零  |

## 2 杂波协方差矩阵已知时降维 MF-CFAR 检测

设在某一被检测距离环上得到的时空快拍为  $X = (X_1^T, X_2^T, \dots, X_L^T)^T$ , 其中  $X_i = (X_{1i}, X_{2i},$

<sup>1</sup> 1999-08-19 收到, 2000-05-04 定稿

$\dots, X_{Mi})^T, i = 1, 2, \dots, L$  是第  $i$  阵元上接收到的  $M$  个脉冲构成的向量, 上标 ‘ $T$ ’ 表示矩阵或向量的转置。  $X$  可以分为以下两部分  $X = \nu S + N$ 。其中  $\nu S$  是目标 ( $|S| = 1, \nu = |\nu| \exp(i\theta)$  是幅度,  $\theta$  服从  $[0, 2\pi]$  区间上的均匀分布),  $N$  由地杂波、接收机噪声, 有源干扰构成。当在主波束方向 (方位角为  $\alpha$ ) 有一相对速度为  $v$  的动目标时, 则该目标 Doppler 频率  $f_D = 2v/\lambda$ , 相应的空域导引向量及时域导引向量分别为

$$\left. \begin{aligned} a(\alpha) &= [1, \exp(i\pi \cos(\alpha)), \dots, \exp(i(L-1)\pi \cos(\alpha))]^T \\ b(v) &= [1, \exp(i4\pi vT/\lambda), \dots, \exp(i(M-1)4\pi vT/\lambda)]^T \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

此时  $S = b(v) \odot a(\alpha)$ , 其中 ‘ $\odot$ ’ 表示矩阵的 Kronecker 积。

本文中假设杂波服从对称零均值复 Gauss 分布。当  $X$  中没有目标时, 杂波协方差矩阵  $R = E(NN^H)$ 。上标 ‘ $H$ ’ 表示矩阵或向量的共轭转置。为检测信号, 做如下假设检验:

$$H_0: X = N, \quad H_1: X = \nu S + N \quad (2)$$

### 2.1 全维 MF-CFAR 检测

对时空快拍  $X$  做加权和  $Y = W^H X$ , 其中最优权  $W = R^{-1}S / (S^H R^{-1}S)$ 。此时选检验统计量为

$$T = |S^H R^{-1}X|^2 / (S^H R^{-1}S) \quad (3)$$

检验门限为  $t$ , 其值由 (4) 式给出。检验法则如下:  $T < t$  时,  $H_0$  成立, 认为没有目标。  $T \geq t$  时,  $H_1$  成立, 认为有目标。该检验是 CFAR 检验。此时虚警概率  $P_{FA}$ 、检测概率  $P_D$  分别为

$$P_{FA} = G_1(t) = \exp(-t), \quad P_D = \sum_{n=0}^{+\infty} (\xi^n e^{-\xi} / n!) G_{n+1}(t) \quad (4)$$

其中

$$G_m(x) = \exp(-x) \sum_{k=0}^{m-1} (x^k / k!) \quad (5)$$

是不完全  $\Gamma$ -函数,  $\xi$  是线性系统输出的信杂比, 对应于权值  $W$  的  $\xi = \text{SINR}_F = |\nu|^2 S^H R^{-1} S^{[9]}$ 。

### 2.2 降维 MF-CFAR 检测

对时空快拍  $X$  做线性变换

$$\tilde{X} = B^H X \quad (6)$$

其中  $B$  是  $LM \times D$  的列满秩常值矩阵,  $D < LM$ 。变换后的杂波协方差矩阵、导引向量分别为  $\tilde{R} = B^H R B$ 、 $\tilde{S} = B^H S$ 。同上, 对  $\tilde{X}$  做加权和  $\tilde{Y} = \tilde{S}^H \tilde{R}^{-1} \tilde{X} / (\tilde{S}^H \tilde{R}^{-1} \tilde{S})$ 。此时的输出信杂噪比为  $\text{SINR}_P = |\nu|^2 S^H B (B^H R B)^{-1} B^H S$ 。

选检验统计量

$$T = |\tilde{S}^H \tilde{R}^{-1} \tilde{X}|^2 / (\tilde{S}^H \tilde{R}^{-1} \tilde{S}) \quad (7)$$

门限  $t$  同上, 检验法则同上。该检验依然是 CFAR 检验, 虚警概率  $P_{FA}$ 、检测概率  $P_D$  同 (4) 式。检测概率是信杂噪比的单调增函数。一般说来  $\text{SINR}_P < \text{SINR}_F$ , 即变换矩阵  $B$  的选取对系统的输出信杂噪比有影响, 进而在相同的虚警概率条件下使降维 AMF-CFAR 检测的

检测概率相对于全维 AMF-CFAR 检测的检测概率变小。然而，由附录中的定理知，当  $B = (U_1, U_2, \dots, U_{LM}) \begin{pmatrix} D_1 & O_1 \\ O_2 & D_2 \end{pmatrix}$ ，有

$$\text{SINR}_P = \text{SINR}_F, \quad (8)$$

其中  $O_1, O_2, D_1, D_2, U_1, U_2, \dots, U_{LM}$  如附录中所定义。

由此可见，此时的降维 MF-CFAR 检测在性能上无所损失。

### 3 杂波协方差矩阵未知时降维 AMF-CFAR 检测

在杂波协方差矩阵  $R$  未知时人们总是先用与被检测距离门邻接的数个距离门上的时空快拍 (二次数据) 做出  $R$  的极大似然估计  $\hat{R}$ ，然后以  $\hat{R}$  代  $R$ ，对被检测距离门上的时空快拍 (基本数据) 进行检测。设  $X_1, X_2, \dots, X_N$  是二次数据， $X$  是基本数据。则  $R = (\sum_{i=1}^K X_i X_i^H) / K$ 。

#### 3.1 全维 AMF-CFAR 检测

此时选检验统计量

$$T = |S^H R^{-1} X|^2 / (S^H \hat{R}^{-1} S) \quad (9)$$

检验门限为  $t$ ，且虚警概率

$$P_{\text{FA}} = \int_0^1 \frac{f_\beta(x, J+1, LM-1)}{(1+tx)^J} dx \quad (10)$$

其中

$$f_\beta(x, n, m) = \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!(m-1)!} x^{n-1} (1-x)^{m-1}, \quad x \in (0, 1) \quad (11)$$

检验法则同上，检测概率为

$$P_D = 1 - \int_0^1 \frac{1}{(1+tx)^J} \sum_{m=1}^J \binom{J}{m} t^m x^m G_m \left( \frac{ax}{1+tx} \right) f_\beta(x, J+1, LM-1) dx \quad (12)$$

其中  $J = K + 1 - LM$ ， $a$  是最优输出信杂噪比 ( $|\nu|^2 S^H R^{-1} S$ )<sup>[4,5]</sup>。

#### 3.2 降维 AMF-CFAR 检测

3.2.1 设  $R$  如前面所定义， $B = (U_1, U_2, \dots, U_{LM}) \begin{pmatrix} D_1 & O_1 \\ O_2 & D_2 \end{pmatrix}$ 。其中  $U_1, U_2, \dots, U_{LM}$  是  $R$  的特征向量， $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{LM}$  是相应的特征根， $O_1, O_2, D_1, D_2$  如附录中所定义。令

$$\tilde{X} = B^H X, \quad \tilde{S} = B^H S, \quad \tilde{R} = B^H R B \quad (13)$$

选检验统计量为

$$T = |\tilde{S}^H \tilde{R}^{-1} \tilde{X}|^2 / (\tilde{S}^H \tilde{R}^{-1} \tilde{S}) \quad (14)$$

由附录中定理易证明， $\tilde{S}^H \tilde{R}^{-1} \tilde{S} = S^H B (B^H R B)^{-1} B^H S = S^H \hat{R}^{-1} S$ ， $\tilde{S}^H \tilde{R}^{-1} \tilde{X} = S^H \hat{R}^{-1} X$ 。可见，(9)、(14) 式中分子、分母均相等，即两个检验统计量是相等的，从而可看出此时的 IV-STAP 的 AMF-CFAR 检测同全维 AMF-CFAR 检测在性能上是一致的。

3.2.2 为节省 AMF-CFAR 实时系统的运算时间，可根据先验杂波知识获得一个近似的杂波协方差矩阵  $R$ ，然后按附录中的定理求得降维变换矩阵  $B$ ，降维变换后杂波协方差矩阵

的极大似然估计是  $\hat{R} = B^H \hat{R} B$ . 对变换后的基本数据做加权和  $\tilde{Y} = \hat{W}^H \tilde{X}$ , 其中  $\hat{W} = \hat{R}^{-1} \tilde{S} / (\hat{S}^H \hat{R}^{-1} \tilde{S})$ . 此时选检验统计量:

$$T = |\hat{S}^H \hat{R}^{-1} \tilde{X}|^2 / (\hat{S}^H \hat{R}^{-1} \tilde{S}) \quad (15)$$

检验门限为  $t$ , 且虚警概率为

$$P_{FA} = \int_0^1 \frac{f_{\beta}(x, J+1, D-1)}{(1+tx)^J} dx \quad (16)$$

检验法则同上, 检测概率为

$$P_D = 1 - \int_0^1 \frac{1}{(1+tx)^J} \sum_{m=1}^J \binom{J}{m} t^m x^m G_m \left( \frac{ax}{1+tx} \right) f_{\beta}(x, J+1, D-1) dx \quad (17)$$

其中  $J = K + 1 - D$ ,  $a$  是此时的最优输出信杂比 ( $|\nu|^2 S^H B (B^H R B)^{-1} B^H S$ ).  $G_m(x)$  是严格单调减函数, 所以  $P_D$  是  $a$  的严格单调增函数.

在第 2 节中我们看到, 当杂波协方差矩阵已知时, 降维只对系统的输出信杂噪比有所影响, 对检测概率曲线本身并无影响. 但是, 当杂波协方差矩阵未知时, 降维不仅对系统的输出信杂噪比有影响, 对检测概率曲线本身也有影响, 其实质也就是降维 AMF-CFAR 检测的自适应响应速度与降维后的维数之间的关系问题. 从图 1 中看出, 当训练样本容量相同时, 检测概率曲线随  $D$  减小, 渐渐向左移动. 这告诉我们, 在相同的信杂噪比输出、虚警概率及训练样本容量条件下, 降维后  $D$  越小检测概率越大. 另一方面, 我们看到在杂波服从 Gauss 分布的前提下, GLRT、AMF-CFAR 检测的检测性能只取决于信杂噪比、训练样本容量及时空快拍的维数. 这说明, 当我们在每一观测方向取一少变的降维变换矩阵时, 为使相应算法达到一定收敛程度所需的训练样本容量可相应减少.

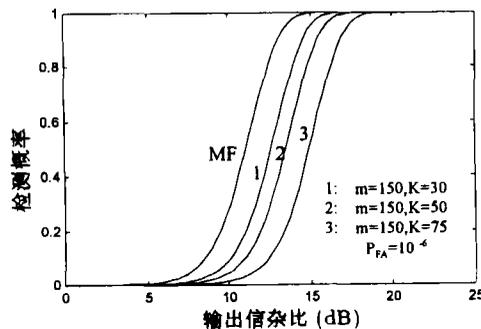


图 1 MF 为杂波协方差矩阵已知时 MF-CFAR 的检测曲线, 另外三条是杂波协方差矩阵未知时 AMF-CFAR 的检测曲线

#### 4 几种降维 STAP 的性能比较

理想条件下 (即在不考虑阵元幅相误差与有源干扰的条件下) IV-STAP, 3DT-SAP, 3B-4D-STAP 和全维自适应在性能上相差不大, 但是 IV-STAP 更为稳定一些. 图 2 所示为 3DT-SAP 降维辅助波束在杂波谱中所处的位置, 其中 “×” 处为导引向量, “○” 处为降维辅助波束. 通常

总是同时在  $m$  个方位  $n$  个 Doppler 通道上选取  $mm$  降维辅助波束 [8]。图 3 所示为理想条件下降维维数分别为 40、30、20 和 10 时 IV-STAP 相应的输出信杂噪比， $2f_D/f_R$  为归一化 Doppler 频率。从图 3 中可看出 IV-STAP 降维的有效性还是很明显的，即使降维维数取 10 时性能曲线也没有明显变坏。

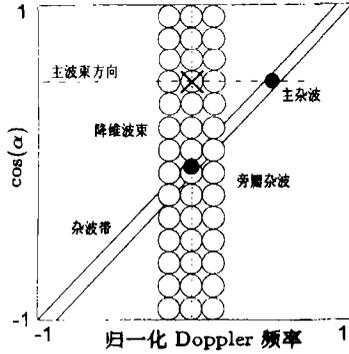


图 2

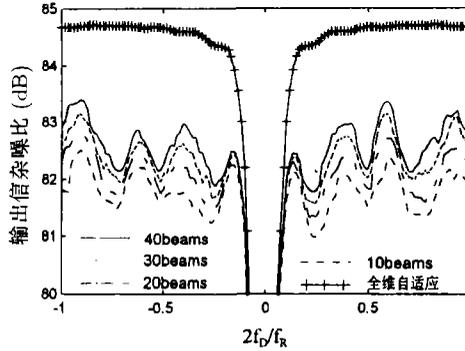


图 3

当出现幅相误差时情况就有了进一步发展。设时空快拍  $X$  中  $X_{k,l}, X_{m,n}$  是  $k, m$  阵元在  $l, n$  时刻收到的信号，且  $X$  中不含信号  $S$ 。考虑到接收阵元上的幅相误差， $X_{k,l}, X_{m,n}$  可表示为

$$X_{k,l} = (1 + u(k))C_{k,l} \exp(jv(k)), \tag{18}$$

$$X_{m,n} = (1 + u(m))C_{m,n} \exp(jv(m)). \tag{19}$$

$C_{k,l}, C_{m,n}$  是相应通道内的所接收的地杂波及接收机噪声， $u(k), u(m), v(k)$  和  $v(m)$  是相应的幅度误差与相位误差。设  $u(k), u(m), v(k)$  和  $v(m)$  相互独立，且  $u(k), u(m)$  服从相同的正态分布  $N(0, \sigma_1^2)$ ， $v(k)$  和  $v(m)$  服从相同的正态分布  $N(0, \sigma_2^2)$ 。由于通常  $\sigma_2^2$  很小，则

$$\begin{aligned} E(X_{k,l}\overline{X_{m,n}}) &= E[(1 + u(k))(1 + u(m))]E[\exp\{j(v(k) - v(m))\}]E[C_{k,l}\overline{C_{m,n}}] \\ &= \begin{cases} (1 + \sigma_1^2)E(C_{k,l}\overline{C_{m,n}}) & k = m \\ \exp\{-\sigma_2^2\}E(C_{k,l}\overline{C_{m,n}}) & k \neq m \end{cases} \approx \begin{cases} (1 + \sigma_1^2)E(C_{k,l}\overline{C_{m,n}}), & k = m \\ (1 - \sigma_2^2)E(C_{k,l}\overline{C_{m,n}}), & k \neq m \end{cases} \end{aligned} \tag{20}$$

设  $R_{mn}$  是第  $m, n$  个阵元所收到的理想杂波的互协方差矩阵，故存在幅相误差的杂波协方差矩阵

$$R' \approx \begin{pmatrix} (1 + \sigma_1^2)R_{11} & (1 - \sigma_2^2)R_{12} & \cdots & (1 - \sigma_2^2)R_{1L} \\ (1 - \sigma_2^2)R_{21} & (1 + \sigma_1^2)R_{22} & \cdots & (1 - \sigma_2^2)R_{2L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (1 - \sigma_2^2)R_{L1} & (1 - \sigma_2^2)R_{L2} & \cdots & (1 + \sigma_1^2)R_{LL} \end{pmatrix} \tag{21}$$

幅相误差的存在使得杂波谱沿空间方向展宽，这在主杂波区尤为明显 (参见图 4、图 5)。

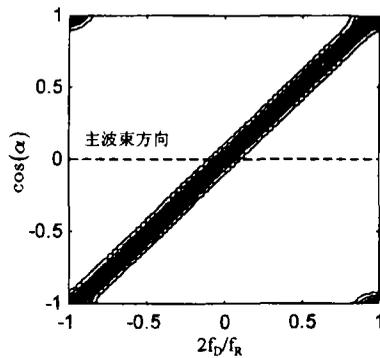


图 4 无幅相误差时杂波谱

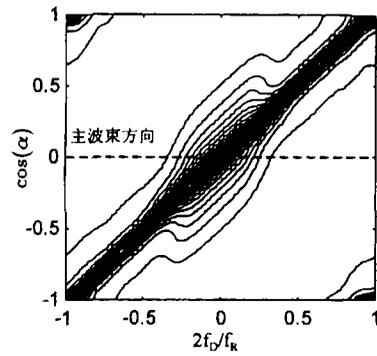


图 5 3% 幅相误差时杂波谱, 主杂波区杂波展宽严重

幅相误差使得原本在理想条件下性能差异不大的各种降维措施产生了分化。图 6 所示为  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.03$  时, IV-STAP, 3DT-SAP, 3B-4D-STAP 和全维自适应相应的输出信杂噪比, IV-STAP 降维后的维数是 30。由于 3DT-SAP 的辅助波束较多, 故该算法对幅相误差不是很敏感。此外, IV-STAP 的表现也很不错。本例中 3DT-SAP 降维后的维数是 75, 然而从图 6 我们却看到在性能上 IV-STAP 较之 3DT-SAP 要更好一些。与此相反, 存在幅相误差时 3B-4D-STAP 的性能则恶化了许多。仿真结果表明在主波束方向当  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.03$  时, IV-STAP 的输出信杂噪比较之 3DT-SAP, 3B-4D-STAP 和全维自适应的平均分别高出 1.91dB, 15.42dB 和  $-0.5$ dB。据此, 我们做出各算法的 AMF-CFAR 检测的检测概率曲线 (参见图 7)。

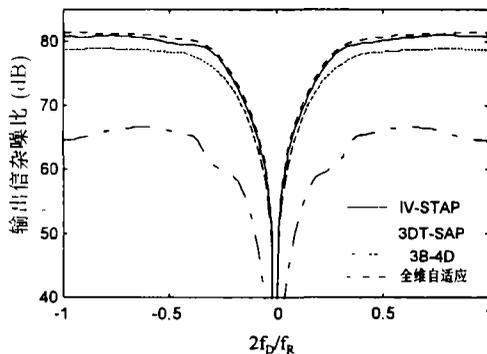


图 6

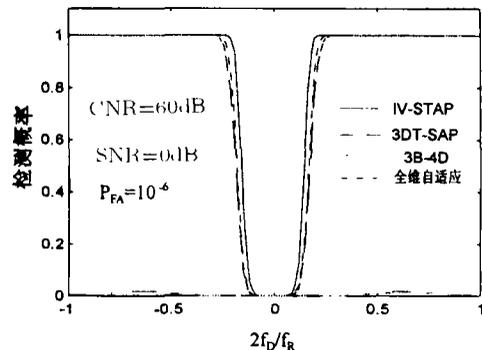


图 7

## 5 结 论

杂波协方差矩阵未知时, 同等的输出信杂噪比条件下降维 STAP 的性能好于全维 STAP (具有更大的检测概率)。所以选取适当的降维变换矩阵 (降维波束) 使输出信杂噪比最大是非常重要的。在没有幅相误差的理想条件下, 现有的一些降维措施从效果上看相差不大。然而一旦引入幅相误差, 即使是不大的幅相误差, 它们的性能也相去甚远。在降维 STAP 算法中降维波束的选取过程中, 我们不仅要考虑到导引向量同杂波带之间的位置关系, 我们还要考虑到杂波自身的特性。IV-STAP 的优点在于其性能对幅相误差、降维波束的数目不甚敏感, 且对主、旁瓣杂波均能很好地抑制。

## 附录

设  $R$  是正定的 Hermit 矩阵,  $R = U\Lambda U^H$ ,  $U = (U_1, U_2, \dots, U_{LM})$ ,  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{LM})$ , 其中  $U_1, U_2, \dots, U_{LM}$  是  $R$  的标准化特征向量,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{LM}$  是相应的特征根. 设  $S$  为导引向量, 则我们有如下定理:

**定理<sup>2</sup>**  $|S^H U_1|^2, |S^H U_2|^2, |S^H U_{K-1}|^2, \dots, \sum_{i=K}^{LM} \lambda_i^{-1} |S^H U_i|^2 > 0$ ; 若  $B = (U_1, U_2, \dots, U_{LM})$   
 $\begin{pmatrix} D_1 & O_1 \\ O_2 & D_2 \end{pmatrix}$ , 则  $(B(B^H R B)^{-1} B^H - R^{-1})S = 0$ ; 其中  $D_1 = \text{diag}(\lambda_1^{-1} U_1^H S, \lambda_2^{-1} U_2^H S, \dots, \lambda_{D-1}^{-1} U_{D-1}^H S)$ ,  $D_2 = (\lambda_D^{-1} U_D^H S, \lambda_{D+1}^{-1} U_{D+1}^H S, \dots, \lambda_{LM}^{-1} U_{LM}^H S)^T$ ,  $1 \leq D \leq LM$ ;  $O_1$  是  $(D-1) \times 1$  零矩阵,  $O_2$  是  $(LM - D + 1) \times (D-1)$  零矩阵.

## 参 考 文 献

- [1] L. E. Brennan, I. S. Reed, Theory of adaptive radar, IEEE Trans. on Aerosp. Electron. Syst., 1973, 9(2), 237-251.
- [2] I. S. Reed, J. D. Mallett, L. E. Brennan, Rapid convergence rate in adaptive arrays, IEEE Trans. on Aerosp. Electron. Syst., 1974, 10(6), 853-863.
- [3] E. J. Kelly, An adaptive detection algorithm, IEEE Trans. on Aerosp. Electron. Syst., 1986, 23(1), 115-127.
- [4] W. S. Chen, I. S. Reed, A new CFAR detection test for radar Digital Signal Proc., 1991, 1(4), 198-214.
- [5] F. C. Robey, D. R. Fuhrmann, E. J. Kelly, R. Nitzberg, A CFAR adaptive matched filter detector, IEEE Trans. on Aerosp. Electron. Syst., 1992, 28(1), 208-216.
- [6] Klein R. Adaptive clutter suppression for airborne phased array radars, IEE Pt.F, 1983, 130(1): 125-132.
- [7] Wang Hong, Lujing Cai, On adaptive spatial-temporal processing for airborne surveillance radar systems, IEEE Trans. on Aerosp. Electron. Syst., 1994, 30(3), 660-669.
- [8] 保 铮, 等, 机载雷达空时二维信号处理, 现代雷达, 1994, 16(1), 38-48; 16(2), 17-27.
- [9] J. S. Goldstein, I. S. Reed, Theory of partially adaptive radar, IEEE Trans. on Aerosp. Electron. Syst., 1997, 33(4), 1309-1324.

PERFORMANCE ANALYSIS OF  
THE INVARIANT SUBSPACE REDUCED-DIMENSION STAP

Wu Dexin

(Shenzhen Polytechnic, Shenzhen 518055, China)

**Abstract** In the paper a new kind of reduced-dimension STAP (IV-STAP) is developed. At the same time its performance is compared with that of the 3B-4D-STAP, the 3DT-SAP and the full dimension STAP for there exist array errors or not.

**Key words** Airborne radar, Space-time processing, Clutter suppression

吴德新: 男, 1964 年生, 讲师, 主要研究方向为随机信号理论及应用, 阵列信号处理. 从事电子及电工方面的教学工作.

<sup>2</sup> 将  $B$  代入计算就可证明定理