

一种基于子波神经网络的多尺度差分方程求解新方法¹

水鹏朗 保 铮 焦李成

(西安电子科技大学雷达信号处理重点实验室 西安 710071)

摘 要 多尺度方程的求解是子波与多分辨分析的基础, 本文提出了用 M -带子波神经网络求解多尺度差分方程 (Multiscale Difference Equation, MSDE) 的新方法. 该方法与以前方法相比, 具有很多优点并且求解方程的范围更为广泛.

关键词 子波神经网络, 多尺度差分方程, M -带正交子波基

中图分类号 TN-052

1 引 言

近年来, 子波与多分辨分析受到了广泛的关注, 而多尺度差分方程 (Multiscale Difference Equation, MSDE) 求解是其应用的基础. 本文研究用子波神经网络进行 MSDE 求解问题. MSDE 是形如 (1) 式的函数方程.

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{p=1}^P \sum_{\mathbf{n}} a_{p,\mathbf{n}} f(D^p \mathbf{x} - \mathbf{t}_{\mathbf{n}}), \quad (1)$$

其中 $\mathbf{x}, \mathbf{t}_{\mathbf{n}}$ 是 $s \times 1$ 的实向量, p, \mathbf{n} 是整数, D 是 $s \times s$ 的实矩阵且所有特征值大于 1. 系数 $a_{p,\mathbf{n}}$ 是实数或复数 (依赖于 f 是实信号还是复信号). 同时 $a_{p,\mathbf{n}}, \mathbf{t}_{\mathbf{n}}$ 满足 (2) 式.

$$\sum_{\mathbf{n}} |a_{p,\mathbf{n}}| < \infty \quad \text{和} \quad \sum_{\mathbf{n}} \|\mathbf{t}_{\mathbf{n}}\|_2 < \infty. \quad (2)$$

MSDE 是双尺度差分方程的推广, 作为一种信号模型能够描述一大类信号. 它的应用遍及许多领域, 如多分辨分析、一维或多维的正交子波基的构造和分形曲线、图象的产生和压缩. 它的一种特殊形式是格型多尺度差分方程 (Lattice Multiscale Difference Equation, LMSDE), 如下式所示.

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{p=1}^P \sum_{\mathbf{n}} a_{p,\mathbf{n}} f(D^p \mathbf{x} - \mathbf{n}), \quad (3)$$

D 是 $s \times s$ 的整数矩阵, \mathbf{n} 是 $s \times 1$ 的整数向量.

MSDE 求解是 MSDE 信号模型应用的关键技术, 对 MSDE 的求解方法目前主要有以下几种: 基于算子不动点的迭代算法、一维 LMSDE 的迭代求解方法和基于 FFT 和 IFFT 的无穷乘

¹ 1996-04-26 收到, 1996-11-04 定稿
国家教委跨世纪人才基金和 FYTEF 基金资助项目

积方法。这些方法在许多文献中都有详细的讨论^[1,2,3]，这几种方法都有一些缺点，特别是对非格型 MSDE，上述几种方法很难奏效。而子波神经网络具有很强的学习一维和多维函数的能力，特别是对于具有紧支集的函数的学习。

2 M -带子波神经网络

子波神经网络是径向基函数 (RBF) 网络的推广。RBF 网络是用一族具有紧支集的基函数来表示任意函数，这组基往往是非正交的。子波神经网络是用正交基来逼近任意函数。结构上有很多优点且网络节点没有冗余。

设 $\phi(x)$ 是生成一个 M -带正交子波基的尺度函数，满足

$$\phi(x) = \sum_n p_n \phi(Mx - n), \quad (4)$$

这里 M 是大于 1 的正整数。

$$\phi_{mn}(x) \equiv M^{m/2} \phi(M^m x - n) \quad (5)$$

$V_m = \overline{\text{span}\{\phi_{mn}, n \in Z\}}$, $m \in Z$ 是由尺度函数 ϕ 生成的多分辨空间序列。那么, $\forall f(x) \in L^2(R)$ 可用它在 V_m 上的投影 $P_{V_m}(f)$ 来逼近, 即

$$f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} P_{V_m}(f), \quad (6)$$

一个 3 层 M -带子波网络的结构如图 1 所示。对于给定的 K 、 J 和 W_j , 网络所表示的函数为

$$g(x) = \sum_{j=-J}^J W_j \phi_{Kj}(x), \quad (7)$$

网络的学习过程也就是通过能量函数不断调节权值 W_j 的过程。文献 [4] 中仅是通过对函数离散样本值的学习来求其近似解。根据要解决的问题设计相应的能量函数将使子波网络的应用更为广泛。这里仅对一维情况进行讨论, 相应结果容易推广到多维情况。

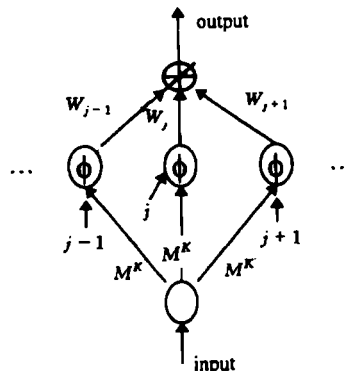


图 1 子波网络的结构

3 用子波网络求解多尺度差分方程

一维 MSDE 表达式如下:

$$f(x) = \sum_{p=1}^P \sum_{n=0}^N a_{p,n} f(\beta^p x - \tau_n), \quad (8)$$

这里 β 是大于 1 的实数, $a_{p,n}, \tau_n$ 满足条件 (2) 式. 如果 $a_{p,n}$ 仅对有限个 n 不为零, 设 $0 \leq n \leq N$ 时, $a_{p,n} \neq 0$, $\tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N$ 且系数满足一定条件, 则 (8) 式的解具有紧支集. 支集满足:

$$\left. \begin{aligned} \left| x - \frac{\tau_0 + \tau_N}{2(\beta - 1)} \right| &\leq \frac{B}{(\beta - 1)}, \\ B &= \max_{p,n} \left| \beta^{-(p-1)} \tau_n - \frac{\beta - \beta^{-(p-1)}}{2(\beta - 1)} (\tau_N + \tau_0) \right|. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

下面对 $a_{p,n}$ 仅对有限个 n 不为零的情况讨论, 设 (8) 式的解 f_0 满足:

$$\|f_0\|_2 = 1, \quad \text{supp } f_0 \subset [-A, A]. \quad (10)$$

我们引入下面 $L^2(R) \rightarrow L^2(R)$ 的线性算子 T

$$T(g)(x) \equiv \sum_{p=1}^P \sum_{n=0}^N a_{p,n} g(\beta^p x - \tau_n), \quad \forall g \in L^2(R). \quad (11)$$

在一定条件下, (8) 式有唯一非零 $L^2(R)$ 解 (相差一个常数乘子) 并且该解是算子 T 的不动点.

对于图 1 的 M -带子波网络定义如下能量函数:

$$\left. \begin{aligned} \forall g \in V_K^A, \quad E(g) &\equiv \int_R (g(x) - T(g)(x))^2 dx, \\ V_K^A &\equiv \text{span}\{\phi_{Kn} : -AM^K \leq n \leq AM^K\}, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

其中 K 是正整数, A 由 (10) 式给出, ϕ 是 M -带正交子波的尺度函数, 则有如下定理:

定理 1 如果 (8) 式有唯一非零的 $L^2(R)$ 解 f_0 (相差一个常数乘子) 满足条件 (10) 式, 则

(1) $\forall g \in L^2(R)$, $\|g\|_2 = 1$, 若 $\min\{\|g - f_0\|_2, \|g + f_0\|_2\} \leq \delta$, 则 $E(g) \leq C'\delta^2$.

(2) $\forall g \in V_K^A$, $E(g) \geq \frac{C''}{2} \min\{\|g - f_0\|_2^2, \|g + f_0\|_2^2\}$, C', C'' 是不依赖于 f_0 和 g 的正常数.

证明 (1) $\forall g \in L^2(R)$, $\|g\|_2 = 1$; 若 $\min\{\|g - f_0\|_2, \|g + f_0\|_2\} \leq \delta$, 不妨设 $\|g + f_0\|_2 \leq \delta$ (另一情况可类似证明). 由于 (8) 式是一个齐次函数方程, $-f_0$ 也是 (8) 式的解. 因此

$$\begin{aligned} E(g) &= \|g - T(g)\|_2^2 = \|(g + f_0) - T(g + f_0)\|_2^2 \leq (\|g + f_0\|_2 + \|T(g + f_0)\|_2)^2 \\ &\leq \left(1 + \sum_{p=1}^P \sum_{n=1}^N |a_{p,n}| \beta^{-p/2} \right)^2 \|g + f_0\|_2^2 \leq C'\delta^2. \end{aligned}$$

(2) $g \in V_K^A$; $\|g\|_2 = 1$; 若 $E(g) \leq \epsilon$, 记 $V_{f_0}^\perp \equiv \{g \in V_K^A : \langle g, f_0 \rangle = 0\}$, $SP \equiv \{f \in L^2(R) : \|f\|_2 = 1\}$, 则 $SP \cap V_{f_0}^\perp$ 是 $L^2(R)$ 的闭子空间. $C'' \equiv \inf_{f \in SP \cap V_{f_0}^\perp} \{E(f)\}$. 由于 V_K^A 是

列紧的且 $SP \cap V_{f_0}^\perp$ 是闭子空间; 用反证法容易证明 $C'' > 0$. 因此, $\forall g \in V_K^A$, $g = \alpha f_0 + g^\perp$; 其中 $g^\perp \in V_{f_0}^\perp$; 于是,

$$\begin{aligned} \min\{\|g - f_0\|_2, \|g + f_0\|_2\} &= \min\{\sqrt{2(1+\alpha)}, \sqrt{2(1-\alpha)}\}, \\ \|g^\perp\|_2 &= \sqrt{(1+\alpha)(1-\alpha)} \geq (1/\sqrt{2}) \min\{\|g - f_0\|_2, \|g + f_0\|_2\}. \end{aligned}$$

所以

$$E(g) = E(\alpha f_0 + g^\perp) = E(g^\perp) \geq C'' \|g^\perp\|_2^2 = 0.5C'' \|g - f_0\|_2^2. \quad \text{证毕}$$

定理 1 表明了 (12) 式定义的能量函数的有效性, 同时给出了能量函数大小和近似解逼近程度之间的定量关系.

用 M -带子波网络求 MSDE 的范数归一化 $L^2(R)$ 解可描述为如下优化问题的求解:

$$\left. \begin{aligned} \min_{f \in V_K^A} E(f, \mathbf{x}), \\ \text{s.t. } \|\mathbf{w}\|_2 = 1. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

M -带子波网络的学习算法

(1) M -带子波网络赋初值

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^{(0)} &= \text{rand}(2AM^K, 1), \quad \mathbf{w}^{(0)} = \mathbf{c}^{(0)} / \|\mathbf{c}^{(0)}\|_2 \\ g^{(0)}(\mathbf{x}) &= \sum_{j=-AM^K}^{AM^K} \mathbf{w}^{(0)}(j) \phi_{Kj}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (14)$$

(2) 产生学习样本和计算能量函数

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \text{rand}([-A, A], Q); \\ E(g^{(k)}, \mathbf{x}) &\equiv \frac{1}{2} \sum_{q=1}^Q E^2(g^{(k)}, \mathbf{x}(q)) + \lambda(\mathbf{w}^{(k)T} \mathbf{w}^{(k)} - 1), \\ E(g^{(k)}, \mathbf{x}(i)) &\equiv g^{(k)}(\mathbf{x}(i)) - T(g^{(k)})(\mathbf{x}(i)). \end{aligned} \quad (15)$$

若 $E(g^{(k)}, \mathbf{x}) < \varepsilon$, $f_0 = g^{(k)}$, 学习过程结束, 否则进行 (3), (4) 步.

(3) 求梯度向量 $\partial E(g^{(k)}, \mathbf{x}) / \partial \mathbf{w}^{(k)}$

$$\frac{\partial E(g^{(k)}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{w}^{(k)}(j)} = \sum_{q=1}^Q E(g^{(k)}, \mathbf{x}(q)) [\phi_{Kj}(\mathbf{x}(q)) - T(\phi_{Kj})(\mathbf{x}(q))] + 2\lambda \mathbf{w}^{(k)}(j). \quad (16)$$

(4) 调整权值

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^{(k+1)} &= \mathbf{w}^{(k)} - \Delta \frac{\partial E(g^{(k)}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{w}^{(k)}}, \quad \mathbf{w}^{(k+1)} = \mathbf{c}^{(k+1)} / \|\mathbf{c}^{(k+1)}\|_2 \\ g^{(k+1)} &= \sum_{j=-AM^K}^{AM^K} \mathbf{w}^{(k+1)}(j) \phi_{Kj}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (17)$$

$k = k + 1$, 转入 (2). 上述学习算法中, λ 是拉格朗日乘子, Δ 是调节权值的步长, ϵ 是学习结束的控制门限. $\text{rand}(k, l)$ 表示产生 $k \times l$ 的服从 $N(0, 1)$ 分布的随机矩阵, $\text{rand}([-A, A], k)$ 表示产生服从 $[-A, A]$ 上均匀分布的 k 维随机向量. 在上述算法中, 能量函数与 (12) 式定义的能量函数在统计意义上是等价的, 即

$$E(g^{(k)}) = (2A/Q)E\{E(g^{(k)}, \bullet)\}, \quad (18)$$

其中 $E\{\bullet\}$ 表示求均值. 关于学习结束的控制也可采用下面的方法:

$$\epsilon_1 \equiv \frac{\max(E(g^{(k)}, \mathbf{x}), k = l, l-1, \dots, l-l_0) - \min(E(g^{(k)}, \mathbf{x}), k = l, l-1, \dots, l-l_0)}{\max(E(g^{(k)}, \mathbf{x}), k = l, l-1, \dots, l-l_0)}. \quad (19)$$

ϵ_1 反映了在连续 $l_0 + 1$ 次修正权值过程中能量函数下降的相对大小, 因此当 ϵ_1 接近于 0 时, 该逼近解接近网络的极限逼近精度, 学习过程终止. 在 V_{K+1}^A 中逼近解的学习算法的权值初值可由在 V_K^A 中的逼近解的系数和 ϕ 所满足的双尺度方程确定, 这样会节省大量的学习时间.

4 对几个典型方程的求解结果

在以下的学习过程中, 网络结点函数均采用 Shannon 基 $\phi(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$ 或紧支集正交子波的尺度函数. 对于大量的例子的学习表明: 若 M -带子波网络中的 M 选为最接近 β 的正整数, 学习效果比其它的选择好.

(1) 格型双尺度方程 $f(x) = 0.5f(2x-3) + f(2x) + 0.5f(2x+3)$ 的求解. 它具有唯一的非零连续解 $f(x) = \begin{cases} 1 - |x|/3, & |x| \leq 3 \\ 0, & |x| > 3 \end{cases}$, $K = 4$ 时, 近似解 \bar{f} 的误差 $\|\bar{f} - f\|_2^2 \leq 0.006$.

(2) 格型三尺度方程的求解, 其解的傅里叶变换为 $\hat{f}(\omega) = \sin^4(0.5\omega)/(0.5\omega)^4$.

$$f(x) = 0.125[f(2x+2) + f(2x-2)] + 0.5[f(2x+1) + f(2x-1)] \\ + (3/32)[f(4x+2) + f(4x-2)] + (3/8)[f(4x+1) + f(4x-1)] + (9/16)f(4x). \quad (20)$$

取 $K = 5$, 求得近似解 \bar{f} 的误差为: $\|f - \bar{f}\|_2 \leq 0.003$.

(3) 双尺度方程的求解, 其中 $\alpha = 2.5, \beta = n(n = -3, -2, \dots, 3)$. $c = (0.1042, 0.2604, 0.5206, 1.0417, 0.5208, -0.0521, 0.1402)$. 取 $K = 5$, 求得近似解 \bar{f} 的误差为: $\|f - \bar{f}\|_2 \leq 0.01$.

5 结论

MSDE 的求解一直是人们关注的课题. 而对非格型 MSDE, 现有的方法不能使用或逼近精度差. 本文对格型和非格型 MSDE 的求解提出了一种有效的方法. 与以前方法相比, 使用范围更为广泛, 同时, 网络节点函数选择的灵活性使得我们可根据待解 MSDE 的特点选择相应的子波类型; 与径向基函数网络相比, 由于选择了正交基作为节点函数, 节点没有冗余, 计算量小. 理论分析和仿真结果都表明了这一点.

参 考 文 献

- [1] Ali M, Tewfik H. Multiscale difference equation signal models: Part I—Theory. IEEE Trans. on Signal Processing, 1995, SP-43(10): 2332–2345.

- [2] Daubechies I, Lagarias J. Two-scale difference equation, I: Existance and global regularity of solutions. SIAM J. Math. Anal., 1991, 22(5): 1388–1410.
- [3] Daubechies I, Lagarias J. Two-scale difference equation, II: Local regularity, infinte products of matrices, and fractals. SIAM J. Math. Anal., 1992, 23(4): 1031–1079.
- [4] Jun Zheng, Walter G, *et al.* Wavelet neural networks for function learning. IEEE Trans. on Signal Processing, 1995, SP-43(6): 1485–1497.
- [5] Alkin O, Caglar H. Design of efficient M -band coders with linear-phase and perfect-reconstruction properties. IEEE Trans. on Signal Processing, 1995, SP-43(7): 1579–1590.

A NEW METHOD FOR SOLVING MSDE BASED ON WAVELET NEURAL NETWORKS

Shui Penglang Bao Zheng Jiao Licheng

(Key Lab. for Radar Signal Processing, Xidian Univ., Xi'an 710071)

Abstract In this paper, a new method for solving multiscale difference equation by the M -band wavelet neural networks is proposed. It is shown that the methods in the paper have many advantages over existed methods and enlarge the range of the solvable equations by the theoretical proofs and computer simulations.

Key words Wavelet neural networks, Multiscale difference equation, M -band orthogonal wavelet basis

水鹏朗: 男, 1967年生, 讲师, 博士生. 研究兴趣为宽带、超宽带雷达信号处理、子波理论和分形理论及其应用.

保 铮: 男, 1927年生, 教授, 中国科学院院士、IEEE 高级会员、中国电子学会会士, 研究领域为雷达信号处理与检测.

焦李成: 男, 1959年, 教授, 博士生导师, 现为 IEEE 高级会员, 主要研究方向为智能信号处理和非线性科学.