第 11 卷 第 5 期　　电子科学学刊　　Vol. 11, No. 5
1989 年 9 月　　JOURNAL OF ELECTRONICS　　Sept., 1989

几种离散正、余弦变换的卷积乘积关系*

吴乐南
(东南大学，南京)

摘要　本文导出第 I、II 种奇、偶离散正、余弦变换的变换域乘积与时域卷积的严格关系，从而可用这些正弦族正交变换做数字滤波.

关键词　数字信号处理；离散余弦变换；离散正弦变换；卷积；滤波

1. 离散正、余弦变换概述

在信源编码、数据压缩及模式识别等应用中，常需用线性变换方法除去数据样本间相关性并压缩数据矢量维散，在这方面，Karhunen-Loéve 变换 (KLT) 可提供最小均方误差的压缩性能，但它要求有关于数据样本的统计资料，还无一般的快速算法.

离散正弦变换 (DST) 与余弦变换 (DCT) 都有快速算法且性能十分接近 KLT，特别是在数字图象处理中常将一幅图象划分成许多子块依次处理，由于边界效应，采用离散付氏变换 (DFT) 或 Walsh-Hadmard 变换等会引入令人讨厌的“方块失真”，而采用 DCT 或 DST 就能减弱其影响，因此 DST 特别是 DCT 很受重视. DST 与 DCT 均分为奇、偶两大类，各有 8 种基本类型[1]，应用主要限于偶变换，重要的是第 I、II 种，实为 KLT 的几种特例：对于一阶 Markov 过程，当相关系数 $\rho\to 1$ 时，其 KLT 退化为 EDCT-II 即经典 DCT；当 $\rho\to 0$ 及 $\rho\to -1$ 时分别退化为 EDST-I 与 EDST-II；当 ρ 取某个正的中间值（因变换点数 N 而异）时，EDCT-I 比 EDCT-II 和 EDST-I 的残余相关更小[2]. 大尺寸 EDCT-I 的优异性能已为图象数据压缩实践证实[3]，另外其速度也比 EDCT-II 更快，在图象处理及模式识别方面应引起重视.

2. DST 与 DCT 滤波问题的引出

在图象处理中，滤波、增强、视觉特性加工等处理常可在空间频率域实现，即利用具有所需频响的二维滤波器 $H_F(k,l)$（下标 F 或 S、C 分别表示其为所需点扩展函数 $h(m,n)$ 的 DFT 或 DST、DCT）与图象灰度信号 $x(m,n)$ 的二维 DFT——$X_F(k,l)$ 逐点相乘得到 $H_F(k,l)X_F(k,l)$ 后再取逆 DFT，便得处理后的灰度图象. 其理论根据是基于熟知的二维 DFT 循环卷积定理，即

$$h(m,n)\circledN x(m,n)=\mathrm{IDFT}[H_F(k,l)X_F(k,l)]$$
$$0\leqslant m、n、k、l\leqslant N-1 \tag{1}$$

式中Ⓝ表示 N 点循环卷积，以下类似.

---

* 1987 年 11 月 16 日收到，1988 年 4 月 16 日修改定稿

由于前述 DST 和 DCT 的优点，我们也希望能用其实现数字滤波，但遗憾的是(1)式之卷积关系对 DST 和 DCT 并不适用，同时 DCT 与 DST 也并非简单地就是 DFT 的实部虚部。因此便产生了一个问题：直接用 H_C 或 H_S 对 X_C 或 X_S 加权，会在空间域产生什么效应？只有找到空间域对应效应并据以对 $h(m,n)$ 相应修正，才能得到与 DFT 相似的滤波效果。

Chen 和 Fralick[4] 发现 EDCT-II 域的乘积关系在时域对应于相应偶延拓序列与一个附加项的 $2N$ 点循环卷积的前 N 点(见下节定理 4)，本文将导出全部第 I、II 种 DST、DCT 的卷积乘积关系(不妨称广义卷积定理)。因一维情形讨论简单且可用于其他信号处理场合，故本文只对一维情形证明，其结论可推广到二维[5]。

3. 广义卷积定理

先给出第 I、II 种 DST、DCT 变换矩阵的定义(因第 III 种实为第 II 种之逆，第 IV 种则尚未见应用，故略，详见文献[1])如下(本文定义中上标罗马数字表示种类，下标表示奇偶，m、k 为整数，N 为 2 的正整数次幂)：

$$[S_E^{\mathrm{I}}]=\sqrt{\frac{2}{N}}\left[\sin\frac{mk\pi}{N}\right],\qquad 1\leqslant m,k\leqslant N-1 \tag{2}$$

$$[S_E^{\mathrm{II}}]=\sqrt{\frac{2}{N}}\left[a(k)\sin\frac{(2m-1)k\pi}{2N}\right],\qquad 1\leqslant m,k\leqslant N \tag{3}$$

$$[C_E^{\mathrm{I}}]=\sqrt{\frac{2}{N}}\left[a(m)a(k)\cos\frac{mk\pi}{N}\right],\qquad 0\leqslant m,k\leqslant N \tag{4}$$

$$[C_E^{\mathrm{II}}]=\sqrt{\frac{2}{N}}\left[a(k)\cos\frac{(2m+1)k\pi}{2N}\right],\qquad 0\leqslant m,k\leqslant N-1 \tag{5}$$

$$[S_O^{\mathrm{I}}]=\frac{2}{\sqrt{2N-1}}\left[\sin\frac{2mk\pi}{2N-1}\right],\qquad 1\leqslant m,k\leqslant N-1 \tag{6}$$

$$[S_O^{\mathrm{II}}]=\frac{2}{\sqrt{2N-1}}\left[\sin\frac{(2m-1)k\pi}{2N-1}\right],\qquad 1\leqslant m,k\leqslant N-1 \tag{7}$$

$$[C_O^{\mathrm{I}}]\quad\frac{2}{\sqrt{2N-1}}\left[a(k)a(m)\cos\frac{2mk\pi}{2N-1}\right],\qquad 0\leqslant m,k\leqslant N-1 \tag{8}$$

$$[C_O^{\mathrm{II}}]=\frac{2}{\sqrt{2N-1}}\left[a(k)b(m)\cos\frac{(2m+1)k\pi}{2N-1}\right],\qquad 0\leqslant m,k\leqslant N-1 \tag{9}$$

其中

$$a(i)\,(i=m\text{ 或 }k)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}}, & i=0\text{ 或 }N\\ 1, & 1\leqslant i\leqslant N-1\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{10}$$

$$b(i)\,(i=m\text{ 或 }k)=\begin{cases}1, & 0\leqslant i\leqslant N-2\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}, & i=N-1\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{11}$$

为了表达简洁，先作几点说明：

(1) 信号序列 $x(m)$ 与单位脉冲响应序列 $h(m)$ 均限于实序列，长度与相应的变换矩阵阶数相同；

(2) $\hat{x}(m)$ 与 $\hat{h}(m)$ 分别表示对 $x(m)$ 与 $h(m)$ 的延拓序列(对偶变换为 $2N$ 长，对奇变换为 $M = 2N - 1$ 长)，在同一种变换中二者的延拓规则相同；

(3) 同一序列的变换对分别用大、小写字母表示，其下标及定理附注说明了变换的种类；

(4) $\mathscr{R}_N(m-n)$ 与 $\delta(m)$ 分别为矩形序列与单位脉冲序列，即

$$\mathscr{R}_N(m-n) = \begin{cases} 1, & n \leqslant m \leqslant N + n - 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{12}$$

和

$$\delta(m) = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases} \tag{13}$$

下面给出卷积定理。

定理 1 (EDST-I)　若

$$Y_S(k) = H_S(k) X_S(k), \qquad 1 \leqslant k \leqslant N-1$$

则

$$y(m) = \frac{1}{\sqrt{2N}} [(-1)^m - 1] \cot \frac{m\pi}{2N} \ \textcircled{\scriptsize 2N}\, \hat{h}(m) \textcircled{\scriptsize 2N}\, \hat{x}(m),$$
$$(1 \leqslant m \leqslant N-1)$$

式中

$$\hat{x}(m) = x(m)\mathscr{R}_{N-1}(m-1) - x(2N-m)\mathscr{R}_{N-1}(m-N-1),$$
$$0 \leqslant m \leqslant 2N-1.$$

证明　对 $\hat{x}(m)$ 取标准 DFT ($2N$ 点)，有

$$\begin{aligned} \hat{x}_F(k) &= \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{m=0}^{2N-1} \hat{x}(m) e^{-j\frac{2mk\pi}{2N}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2N}} \left[\sum_{m=1}^{N-1} x(m) e^{-j\frac{mk\pi}{N}} - \sum_{m=N+1}^{2N-1} x(2N-m) e^{-j\frac{mk\pi}{N}} \right] \\ &= -j\sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{m=1}^{N-1} x(m) \sin \frac{mk\pi}{N}, \quad (0 \leqslant k \leqslant 2N-1) \end{aligned}$$

即

$$X_S(k) = j\hat{X}_F(k), \ 1 \leqslant k \leqslant N-1$$

同理

$$H_s(k) = j\hat{H}_F(k), \ 1 \leqslant k \leqslant N-1$$

于是 $\hat{H}_F(k)\hat{X}_F(k) = -Y_S(k)$ 为 k 的实函数，从而

$$y(m) = \text{IEDST} - I[Y_S(k)]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{k=1}^{N-1} [-\hat{H}_F(k)\hat{X}_F(k)] \sin \frac{mk\pi}{N}$$

$$= I_m \left\{ \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{k=0}^{2N-1} [-2\mathscr{R}_{N-1}(k-1)\hat{H}_F(k)\hat{X}_F(k)] e^{\frac{2mk\pi}{2N}} \right\}$$

$$= I_m\{\mathrm{IDFT}[-2\mathscr{R}_{N-1}(k-1)\hat{H}_F(k)\hat{X}_F(k)]\}, \quad (1 \leqslant m \leqslant N-1)$$

根据(1)式，上式可表为 $2N$ 点循环卷积，即有

$$y(m) = I_m\{\mathrm{IDFT}[-2\mathscr{R}_{N-1}(k-1)] ⓶ⓝ \hat{h}(m) ⓶ⓝ \hat{x}(m)\}$$

$$= \left(-\sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{k=1}^{N-1} \sin \frac{mk\pi}{N}\right) ⓶ⓝ \hat{h}(m) ⓶ⓝ \hat{x}(m)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2N}} [(-1)^m - 1] \cot \frac{m\pi}{2N} ⓶ⓝ \hat{h}(m) ⓶ⓝ \hat{x}(m)$$

证毕.

以下各定理证明类似，我们直接给出结论.

定理 2 (EDST-II)　若

$$Y_S(k) = H_S(k)X_S(k), \qquad 1 \leqslant k \leqslant N$$

则

$$y(m) = \frac{1}{\sqrt{2N}} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right)(-1)^{m+1} - \cot \frac{(2m+1)\pi}{4N}\right] ⓶ⓝ \hat{h}(m) ⓶ⓝ \hat{x}(m)$$

$$(1 \leqslant m \leqslant N)$$

式中

$$\hat{x}(m) = x(m)\mathscr{R}_N(m-1) - x(2N+1-m)\mathscr{R}_N(m-N-1)$$

$$1 \leqslant m \leqslant 2N.$$

定理 3 (EDCT-I)　若

$$Y_C(k) = H_C(k)X_C(k), \qquad 0 \leqslant k \leqslant N$$

则

$$y(m) = a(m)\left[\left\{\sqrt{2N}\,\delta(m) - [1 + (-1)^m] \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4N}}\right\} \times ⓶ⓝ \hat{h}(m) ⓶ⓝ \hat{x}(m)\right] \qquad (0 \leqslant m \leqslant N)$$

$$\approx \sqrt{2N}\, a(m)[\hat{h}(m) ⓶ⓝ \hat{x}(m)], \quad (当 \ N \gg 1)$$

式中

$$\hat{x}(m) = \begin{cases} \dfrac{1}{a(m)} x(m), & 0 \leqslant m \leqslant N \\ x(2N-m), & N+1 \leqslant m \leqslant 2N-1 \end{cases}$$

定理 4 (EDCT-II)[4]　若

$$Y_C(k) = H_C(k)X_C(k), \quad 0 \leqslant k \leqslant N-1$$

则

$$y(m)=4\left\{\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}-1\right)+\left[\cos\frac{(2m-1)(N-1)\pi}{4N}\right]\right.$$

$$\left.\times\frac{\sin\frac{(2m-1)\pi}{4}}{\sin\frac{(2m-1)\pi}{4N}}\right\} ⓃⓃ\hat{h}(m)ⓃⓃ\hat{x}(m) \tag{14}$$

$$(0\leqslant m\leqslant N-1)$$

式中

$$\hat{x}(m)=x(m)\mathscr{R}_N(m)+x(2N-1-m)\mathscr{R}_N(m-N),\ 0\leqslant m\leqslant 2N-1$$

本文将(14)式进一步简化为:

$$y(m)=\left[\sqrt{2}-2-2(-1)^m\cot\frac{(2m-1)\pi}{4N}\right]\textcircled{2N}\hat{h}(m)\textcircled{2N}\hat{x}(m)$$

定理 5　(ODST-I)　若

$$Y_S(k)=H_S(k)X_S(k),\ 1\leqslant k\leqslant N-1$$

则

$$y(m)=\frac{1}{\sqrt{M}}\left[(-1)^m\csc\frac{m\pi}{M}-\cot\frac{m\pi}{M}\right]\textcircled{M}\hat{h}(m)\textcircled{M}\hat{x}(m)$$

$$(1\leqslant m\leqslant N-1)$$

式中

$$\hat{x}(m)=x(m)\mathscr{R}_{N-1}(m-1)-x(M-m)\mathscr{R}_{N-1}(m-N),\qquad 1\leqslant m\leqslant M$$

定理 6 (ODST-II)　若

$$Y_S(k)=H_S(k)X_S(k),\ 1\leqslant k\leqslant N-1$$

则

$$y(m)=-\cot\frac{(2m+1)\pi}{2M}\ \textcircled{M}\hat{h}(m)\textcircled{M}\hat{x}(m),\ (1\leqslant m\leqslant N-1)$$

式中

$$\hat{x}(m)=x(m)\mathscr{R}_{N-1}(m-1)-x(M+1-m)\mathscr{R}_{N-1}(m-N-1)$$
$$1\leqslant m\leqslant M$$

定理 7　(ODCT-I)　若

$$Y_C(k)=H_C(k)X_C(k),\qquad 0\leqslant k\leqslant N-1$$

则

$$y(m)=a(m)\left\{\left[\sqrt{M}\,\delta(m)-\frac{1}{\sqrt{M}}\right.(\sqrt{2}-1)\textcircled{M}\hat{h}(m)\textcircled{M}\hat{x}(m)\right\}$$

$$(0\leqslant m\leqslant N-1)$$

$$\approx\sqrt{M}a(m)[\hat{h}(m)\textcircled{M}\hat{x}(m)]\qquad(当\ N\gg1)$$

式中

$$\hat{x}(m) = \begin{cases} \dfrac{1}{a(m)} x(m), & 0 \leqslant m \leqslant N-1 \\ x(M-m), & N \leqslant m \leqslant M-1 \end{cases}$$

定理 8 (ODCT-II)　若

$$Y_C(k) = H_C(k) X_C(k), \qquad 0 \leqslant k \leqslant N-1$$

则

$$y(m) = b(m) \left\{ \frac{1}{\sqrt{M}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 - (-1)^m \csc \frac{(2m-1)\pi}{2M} \right] \right.$$

$$\left. \times Ⓜ \hat{h}(m) Ⓜ \hat{x}(m) \right\}, \quad (0 \leqslant m \leqslant N-1)$$

式中

$$\hat{x}(m) = b(m)x(m) + b(M-1-m)x(M-1-m), \quad 0 \leqslant m \leqslant M-1$$

4. 结论

上述定理严格给出全部第 I、II 种 DST 和 DCT 滤波的时域效应. 它们均等效于把输入序列和滤波器单位脉冲响应序列按某种对称性延拓后再与某个附加项做 $2N$ 点(奇变换为 $2N-1$ 点)循环卷积. 知道了这种时(空)域混叠效应,便可相应修正 $h(m)$ 以获得所需滤波效果. 例如文献 [4] 考虑了(14)式中 $\sin x/\sin(Nx)$ 项的影响后适当选择 $h(m)$, 将 EDCT-II 滤波用于图象增强, 几乎无方块失真,质量比 DFT 滤波明显改善; 文献[3]将 DFT 域视觉频响模型推广到 EDCT-I 域,实现了该域的视觉滤波. 因此,本文广义卷积定理对 DCT 和 DST 滤波有理论指导作用.

参　考　文　献

[1] Zhongde Wang, B. R. Hunt, *Appl. Math. Comput.*, **16**(1985),19—48.

[2] 王中德、许生龙,电子学报,**13**(1985)6,80—83.

[3] 吴乐南、成瑜,通信学报,**9**(1988)1,61—68.

[4] W. H. Chen, S. C. Fralick, Image Enhancement Using Cosine Transform Filtering, in Proc. of the Symposium on Current Mathematical Problems in Image Science, Monterey, Ca., Nov. 1976, pp. 186—192.

[5] 吴乐南,关于几种离散正、余弦变换的卷积定理,南京工学院校庆报告会论文集(数字信号处理研究室), 1987. 10, pp. 41—60.

THE CONVOLUTION-MULTIPLICATION RELATION FOR SEVERAL DISCRETE SINE AND COSINE TRANSFORMS

Wu Lenan

(Southeast University, Nanjing)

Abstract　Strict relations between the multiplication in transform domain and the convolution in time domain are derived for odd and even discrete sine and cosine transforms of version I and II, thus it is possible to use these orthogonal transforms of the sinusoidal family in digital filtering.

Key words　Digital signal processing; DCT; DST; Convolution; Filtering