第 13 卷 第 2 期　　电子科学学刊　　Vol. 13, No. 2
1991 年 3 月　　JOURNAL OF ELECTRONICS　　Mar., 1991

# Bojarski 恒等式在普适的双站散射条件下的扩展*

冯孔豫　张守融　马新才
(中国科学院电子学研究所，北京)

**摘要**　在物理光学近似下，本文将 Bojarski 恒等式扩展到普遍的双站散射机制上．它比 S. R. Raz (1976) 在 $\hat{k}\cdot\boldsymbol{E}^i=\hat{k}_0\cdot\boldsymbol{E}^i=0$ 条件下得到的更为普适．指出多站去极化散射成像系统的优越性，并指出了 S. R. Raz 在其公式推导中存在的问题．

**关键词**　电磁散射；Bojarski 恒等式；双站散射

## 1. 引言

Bojarski 恒等式是在物理光学近似、反向散射条件下导出的[1]．它只能用于单站散射成像系统．S. R. Raz[2]曾在 $\hat{k}\cdot\boldsymbol{E}^i=\hat{k}_0\cdot\boldsymbol{E}^i=0$ 条件下将它扩展到双站散射成像．本文则将其扩展到普遍的双站散射机制上，这就有可能使成像系统简化．双站散射必然会产生去极化效应，论证表明这种去极化效应将使散射场含有目标的更多信息．实际上，成像只能在有限空间角，有限频率上进行．因此，在相同的空间角和频率条件下，多站散射成像系统有可能获得较好图像．

## 2. 公式的推导

设单色平面电磁波由(1)，(2)式表述：

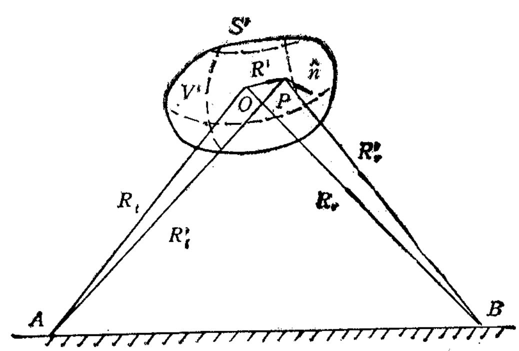


图 1　双站散射的几何关系

$$\boldsymbol{E}^i(t,\boldsymbol{R}')=\hat{e}^iE^i\exp[-ik(\hat{R}_t\cdot\boldsymbol{R}'+R_t)+i\omega t] \tag{1}$$

$$\boldsymbol{H}^i(t,\boldsymbol{R}')=(\varepsilon/\mu)^{\frac{1}{2}}(\hat{R}_t\times\boldsymbol{E}^i)=\hat{h}^iH^i\exp[-ik(\hat{R}_t\cdot\boldsymbol{R}'+R_t)+i\omega t] \tag{2}$$

1990 年 5 月 4 日收到，1990 年 7 月 25 日修改定稿
* 国家自然科学基金资助项目．

设这个平面波从任意方向照射导体目标如图1. 则在物理光学近似下，远区散射场的普遍表达式应为[3]

$$\boldsymbol{E}^s = -(i\omega\mu H^i/(2\pi R_r))\exp(-ikR)\int_{s_0}\{\hat{n}\times\hat{h}^i - [(\hat{n}\times\hat{h}^i)\cdot\hat{R}_r]\hat{R}_r\}\exp[ik\boldsymbol{R}'\cdot(\hat{R}_r-\hat{R}_t)]ds' \tag{3}$$

这儿"$O$"是导体的相位参考点，$P$是所考虑的散射源点，$\boldsymbol{R}_t$是从发射机$A$到"$O$"的距离矢量，$\boldsymbol{R}_r$是从"$O$"至接收机$B$的距离矢量，$\hat{n}$是$P$点的外向法线单位矢量，而$\boldsymbol{R}'$则为自"$O$"至$P$的距离矢量，且

$$R = R_t + R_r,\ k = \omega/c$$

将(2)式代入(3)式，并经运算后可得

$$\boldsymbol{E}^s = -[ikE^i/(2\pi R_r)]\exp(-ikR)\int_{s_1}[\boldsymbol{e}_1(\hat{n}\cdot\hat{e}^i)-\boldsymbol{e}_2(\hat{n}\cdot\hat{R}_t)]\exp[ik\boldsymbol{R}'\cdot(\hat{R}_r-\hat{R}_t)]ds'$$

$$\triangleq [E^i/(2R_r\sqrt{\pi})]\exp(-ikR)\boldsymbol{\rho}(k,\hat{R}_t,\hat{R}_r) \tag{4}$$

式中
$$\boldsymbol{e}_1 = \hat{R}_r\times(\hat{R}_t\times\hat{R}_r),\ \boldsymbol{e}_2 = \hat{R}_r\times(\hat{e}^i\times\hat{R}_r) \tag{5}$$

$s_0$为导体的被照射部分. 当远场条件满足时，在(4)式积分的[……]中，$\hat{R}_t$, $\hat{R}_r$并由此得到的$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$均可视作常矢量. 在多站散射成像系统中，发射条件是固定的，因此以下讨论中可将$\hat{R}_t$和$\hat{e}^i$视作不变量，这就保证了以下引入的矢量$\boldsymbol{p}$与频率、$\hat{R}_r$成为一一对应. 给$\boldsymbol{\rho}$配互补项

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho}(k,\hat{R}_t,\hat{R}_r) &+ \boldsymbol{\rho}^*(k,-\hat{R}_t,-\hat{R}_r)\\ &= (-ik/\sqrt{\pi})\int_{s_0}[\boldsymbol{e}_1(\hat{n}\cdot\hat{e}^i)-\boldsymbol{e}_2(\hat{n}\cdot\hat{R}_t)]\exp[ik\boldsymbol{R}'\cdot(\hat{R}_r-\hat{R}_t)]ds'\\ &\quad + \{(-ik/\sqrt{\pi})\int_{s_1'}[(-\boldsymbol{e}_1)(\hat{n}\cdot\hat{e}^i)-\boldsymbol{e}_2(\hat{n}\cdot(-\hat{R}_t))]\exp[-ik\boldsymbol{R}'\\ &\quad\cdot(\hat{R}_r-\hat{R}_t)]ds'\}^*\end{aligned} \tag{6}$$

如目标外形是凸的，则 $s_0\cup s_0 = s'$. 再应用散度定理，可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho}_+ + \boldsymbol{\rho}_-^* &= (-ik/\sqrt{\pi})\int_{s'}[\boldsymbol{e}_1(\hat{n}\cdot\hat{e}^i)-\boldsymbol{e}_2(\hat{n}\cdot\hat{R}_t)]\exp(i\boldsymbol{R}'\cdot\boldsymbol{p})ds'\\ &= (-ik/\sqrt{\pi})\Big\{\boldsymbol{e}_1\int_{V'}\nabla'\cdot[\hat{e}^i\exp(i\boldsymbol{R}'\cdot\boldsymbol{p})]dv'\\ &\quad - \boldsymbol{e}_2\int_{V'}\nabla'\cdot[\hat{R}_t\exp(i\boldsymbol{R}'\cdot\boldsymbol{p})]dv'\\ &= (k/\sqrt{\pi})[\boldsymbol{e}_1(\hat{e}^i\cdot\boldsymbol{p})-\boldsymbol{e}_2(\hat{R}_t\cdot\boldsymbol{p})]\int_{V'}\exp(i\boldsymbol{R}'\cdot\boldsymbol{p})dv'\end{aligned} \tag{7}$$

式中"*"指复共轭，$\boldsymbol{\rho}_+$和$\boldsymbol{\rho}_-$是 $\boldsymbol{\rho}(k,\hat{R}_t,\hat{R}_r)$ 和 $\boldsymbol{\rho}(k,-\hat{R}_t,-\hat{R}_r)$ 相应的简写，且

$$\boldsymbol{p}\triangleq k(\hat{R}_r-\hat{R}_t) \tag{8}$$

我们定义

$$\begin{aligned}\Gamma(\boldsymbol{p}) &= \sqrt{\pi}\,|\boldsymbol{\rho}_+ + \boldsymbol{\rho}_-^*|/|k[\boldsymbol{e}_1(\hat{e}^i\cdot\boldsymbol{p})-\boldsymbol{e}_2(\hat{R}_t\cdot\boldsymbol{p})]|\\ &= \int_{V'}\exp(i\boldsymbol{R}'\cdot\boldsymbol{p})dv'\\ &\triangleq \int_{\infty}\gamma(\boldsymbol{R}')\exp(i\boldsymbol{R}'\cdot\boldsymbol{p})dv'\end{aligned} \tag{9}$$

$$\gamma(\boldsymbol{R}') = 1,\ \boldsymbol{R}' \in V';\ \gamma(\boldsymbol{R}') = 0,\ \boldsymbol{R}' \notin V'$$

式中$|\cdots\cdots|$指取矢量模．只要分母不得零，(9)式总是成立，它是 Bojarski 恒等式的普遍形式．如令(9)式中 $\hat{R}_r = -\hat{R}_t$，即得用于反向散射的 Bojarski 恒等式的本来形式．考虑到测量 $E_\theta$ 和 $E_\phi$ 往往比测量 $\boldsymbol{E}^s$ 来得实际，写出 $\Gamma_\theta$ 和 $\Gamma_\phi$ 是有益的．推导中注意如 $\hat{\theta}$，$\hat{\phi}$ 与 $\boldsymbol{r}(\rho,\theta,\phi)$ 相联系；则 $\hat{\theta}$，$-\hat{\phi}$ 将与$-\boldsymbol{r}$ 相联系，即 $\boldsymbol{r}(\rho,\pi-\theta,\phi+\pi)$．则得

$$\Gamma_\theta(\boldsymbol{p}) = \sqrt{\pi}(\rho_{\theta+} + \rho^*_{\theta-})/\{\hat{\theta}\cdot[\boldsymbol{e}_1(\hat{e}^i\cdot\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{e}_2(\hat{R}_t\cdot\boldsymbol{p})]k\} \tag{10}$$

$$\Gamma_\phi(\boldsymbol{p}) = \sqrt{\pi}(\rho_{\phi+} - \rho^*_{\phi-})/\{\hat{\phi}\cdot[\boldsymbol{e}_1(\hat{e}^i\cdot\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{e}_2(\hat{R}_t\cdot\boldsymbol{p})]k\} \tag{11}$$

对 $\Gamma'_s$ 作傅氏变换，即得

$$\gamma(\boldsymbol{R}') = (2\pi)^{-3}\oint_p \Gamma'_s(\boldsymbol{p})\exp(-i\boldsymbol{R}'\cdot\boldsymbol{p})dp \tag{12}$$

式中 $\oint_p$ 指积分在全 $p$ 空间进行，$\Gamma'_s(\boldsymbol{p})$ 指 $\Gamma_\theta(\boldsymbol{p})$，$\Gamma_\phi(\boldsymbol{p})$ 或 $\Gamma(\boldsymbol{p})$ 中任一个．

(9)、(10)和(11)式中要求从目标的正、背两面照射取得数据，在雷达成像中，这是不现实的．为此 Lewis 建议将散射体处理成对称于照射与隐影两部份的分界面[1]，经这一处理后，可得

$$\Gamma(\boldsymbol{p}) = (2\sqrt{\pi}\,\mathrm{Re}|\boldsymbol{\rho}_+|)/|k[\boldsymbol{e}_1(\hat{e}^i\cdot\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{e}_2(\hat{R}_t\cdot\boldsymbol{p})] \tag{13}$$

$$\Gamma_\theta(\boldsymbol{p}) = (2\sqrt{\pi}\,\mathrm{Re}\rho_{\theta+})/\{\hat{\theta}\cdot[\boldsymbol{e}_1(\hat{e}^i\cdot\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{e}_2(\hat{R}_t\cdot\boldsymbol{p})]k\} \tag{14}$$

$$\Gamma_\phi(\boldsymbol{p}) = (2\sqrt{\pi}\,\mathrm{Re}\rho_{\phi+})/\{\hat{\phi}\cdot[\boldsymbol{e}_1(\hat{e}^i\cdot\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{e}_2(\hat{R}_t\cdot\boldsymbol{p})]k\} \tag{15}$$

为了便于计算，取坐标系如图 2 所示．

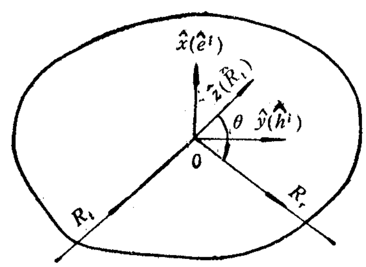


图 2　座标系

图中 $\hat{x} = \hat{e}^i$，$\hat{z} = \hat{R}_t$，$\hat{y} = \hat{h}^i$．且 $\hat{R}_r = \hat{x}\sin\theta\cos\phi + \hat{y}\sin\theta\sin\phi + \hat{z}\cos\theta$，$\hat{\theta} = \hat{x}\cos\theta\cos\phi + \hat{y}\cos\theta\sin\phi - \hat{z}\cos\theta$，$\hat{\phi} = -\hat{x}\sin\phi + \hat{y}\cos\phi$．将以上关系式代入 (13)，(14)，(15)式，经运算得

$$\Gamma(\boldsymbol{p}) = (2\sqrt{\pi}\,\mathrm{Re}|\boldsymbol{\rho}_+|)/[k^2(\cos\theta - 1)] \tag{16}$$

$$\Gamma_\theta(\boldsymbol{p}) = (2\sqrt{\pi}\,\mathrm{Re}\rho_{\theta+})/[k^2\cos\phi(\cos\theta - 1)] \tag{17}$$

$$\Gamma_\phi(\boldsymbol{p}) = (2\sqrt{\pi}\,\mathrm{Re}\rho_{\phi+})/[k^2\sin\phi(\cos\theta - 1)] \tag{18}$$

## 3. 讨论

(1) (14)式中 $\boldsymbol{e}_1$ 项是目标的照明部分表面在入射电场的极化取向 $\hat{e}^i$ 上的投影；而 $\boldsymbol{e}_2$ 项则是该被照明表面在场入射方向 $\hat{R}_t$ 上的投影．两者相互正交．单站散射则只有后面这一项．因此多站散射包含的信息要比单站散射的丰富．这意味着，在相同的空间角和

频率条件下，多站散射成像系统有可能获得较好图像。

(2) (16)式虽形式上与 Raz 所得的相同，但物理含义是不相同的。前者 $\Gamma(\boldsymbol{p})$ 是在 $\boldsymbol{E}^s$ 方向上测量的，这个测量方向是随 $\hat{R}_r$ 改变而改变；而后者 $\Gamma(\boldsymbol{p})$ 是在 $\boldsymbol{E}^i$ 方向上测量的，它是不随 $\hat{R}_r$ 改变的。参考文献[4]报道了圆极化对成像的改善。他们是在单站条件下做的实验。这一实验系统几乎没有获得(4)式中 $\hat{e}^i$ 方向投影项的信息。因此有理由设想圆极化多站成像是有优越性的。

(3) 从(3)式可以推知，Raz 推导中的前提：$\hat{k}\cdot\boldsymbol{E}^i=\hat{k}_0\cdot\boldsymbol{E}^i=0$ 只有当散射角很小时才近似成立。并且在推导过程中用 $\boldsymbol{p}$ 代替 $\boldsymbol{q}$ 是不妥的，因 $\boldsymbol{q}$ 与 $\boldsymbol{p}$ 是正交的，所以严格说来文献[2]中的(14)式不能成立。

## 参 考 文 献

[1] R. M. Lewis, *IEEE Trans. on AP*, AP-17(1969)5, 308—314.
[2] S. R. Raz, *IEEE Trans. on AP*, AP-24(1976)1, 66—70.
[3] S. Silver, Microwave Antenna Theory and Design, MIT Radiation Laboratory Series, Vol.12, McGraw-Hill Company, New York, Chap. 5, (1949).
[4] N. H. Farhat, C. L. Werner, T. H. Chu, *Radio Science*, 19(1984)9, 1347—1355.

# BOJARSKI'S IDENTITY EXPANDED TO THE GENERAL BISTATIC SCATTERING SCHEME

Feng Kongyu Zhang Shourong Ma Xincai
*(Institute of Electronics, Academia Sinica, Beijing)*

**Abstract** Under the physical optics approximation, Bojarski's Identity is expanded to the general bistatic scattering scheme. The result is more general than that obtained under the prerequisite $\hat{k}\cdot\boldsymbol{E}^i=\hat{k}_0\cdot\boldsymbol{E}^i=0$ by S. R. Raz (1976). The benefit of the bistatic depolarized scattering imaging is demonstrated, and the improper treatment in the derivation deduced by S. R. Raz is pointed out.

**Key words** Electromagnetic scattering; Bojarski's identity; Bistatic scattering