

静电离心系统中电子的非圆轨道运动 规律的数值研究

欧阳征标

(深圳大学光电技术工程系,深圳)

摘要 本文采用电子计算机数值分析方法对静电离心系统中电子的非圆轨道运动的规律进行了研究。通过大量的数值计算、分析和研究发现:电子做非圆轨道运动时,其运动存在着角向和径向周期性,且这种周期性只与电子的横向注入速度、注入位置及系统中所加的静电电压有关,而几乎与其横向注入角度无关;不同参量下的电子运动的径向周期与角向周期之比均趋近于同一常数;当电子注的横向注入速度较小($\leq 0.35c$)时,电子运动的径向周期与系统中所加的静电电压的平方根成反比;不同参量下的电子运动的径向周期均近似等于相应系统中的特征振荡周期。

关键词 静电离心系统;电子运动;数值分析

一、引言

近年来,静电电子回旋谐振脉塞和静电自由电子激光器引起了国际上的广泛兴趣^[1-7],其中大部分工作都是在电子运动轨道为圆的情况下完成的。随着研究的进一步深入,就必须研究电子的轨道为非圆的情况。在这种情况下为了要研究系统中的电子与电磁波的相互作用过程,首先必须对只有静电离心场而没有电磁波作用时的电子静态运动轨道及其规律性进行研究。

在50到60年代,由于静电微波器件研究的推动,曾有过一些关于静电离心系统中电子的非圆轨道运动的规律性的研究报告^[8-10]。这些工作对于静电离心系统中电子的接近于圆的非圆轨道运动的规律性进行了比较详细的研究,但却没有对电子的更复杂的非圆轨道运动的规律性进行详细而深入的研究。本文将采用数值计算和分析的方法对静电离心系统中电子的非圆轨道运动的规律性进行深入的研究。首先给出了静电离心系统中的电子运动的一般方程及其归一化形式,然后给出了数值计算结果以及对这些结果进行分析所得的结论。

二、电子运动方程及其归一化

我们知道,静电离心系统是内导体加有正电压、外导体加有负电压或接地的同轴系

统。设内外导体之间的电位差为 V_0 ，则该系统中所建立的静态电场在距系统中心轴线 R 处应为^[8,9]

$$\mathbf{E}_0 = V_0 \mathbf{e}_R / [R \ln(b/a)] \quad (1)$$

其中 a, b 分别为同轴系统中的内外导体的半径。这样，可以写出系统中的电子运动方程为

$$\left. \begin{aligned} d\boldsymbol{\gamma}/dt &= \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\beta} / (m_0 c) \\ d\mathbf{v}/dt &= [\mathbf{F} - \boldsymbol{\beta}(\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\beta})] / (\gamma m_0) \\ d\mathbf{r}/dt &= \mathbf{v}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r} &= R \mathbf{e}_R + z \mathbf{e}_z = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z \\ \mathbf{F} &= -|e| \mathbf{E}_0 \\ \boldsymbol{\beta} &= \mathbf{v}/c, \quad \gamma = 1/\sqrt{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

以上诸式中， c 为光速， m_0 为电子静止质量， $|e|$ 为电子电荷值， \mathbf{v} 为电子的运动速度。

引入如下的归一化量：

$$\left. \begin{aligned} (\bar{v}_x, \bar{v}_y, \bar{v}_\perp, \bar{v}_\parallel) &= (v_x, v_y, v_\perp, v_\parallel)/c = (\beta_x, \beta_y, \beta_\perp, \beta_\parallel) \\ \bar{\mathbf{E}}_0 &= |e| \mathbf{E}_0 / (m_0 \omega c), \quad \bar{V}_0 = |e| V_0 / (m_0 c^2) \\ (\bar{R}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) &= (R, x, y, z) \omega / c, \quad \bar{t} = \omega t \\ (\bar{F}_x, \bar{F}_y, \bar{F}_z) &= (F_x, F_y, F_z) / (m_0 \omega c) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中 ω 为归一化参考频率，一般与 $(v_{\perp 0}/R_0)$ 同数量级，这里 $v_{\perp 0}$ 、 R_0 分别为电子注的初始注入速度和径向坐标。这样，注意到在我们所研究的情况下， $F_z = 0$ ，则方程(2)可以化为如下的归一化形式：

$$\left. \begin{aligned} d\boldsymbol{\gamma}/d\bar{t} &= \bar{F}_x \beta_\perp \cos \phi + \bar{F}_y \beta_\perp \sin \phi \\ d\beta_\perp/d\bar{t} &= \gamma^{-1} (1 - \beta_\perp^2) (\bar{F}_x \cos \phi + \bar{F}_y \sin \phi) \\ d\beta_\parallel/d\bar{t} &= -\gamma^{-1} \beta_\parallel \beta_\perp (\bar{F}_x \cos \phi + \bar{F}_y \sin \phi) \\ d\phi/d\bar{t} &= \gamma^{-1} \beta_\perp^{-1} (-\bar{F}_x \sin \phi + \bar{F}_y \cos \phi) \\ d\bar{x}/d\bar{t} &= \beta_\perp \cos \phi \\ d\bar{y}/d\bar{t} &= \beta_\perp \sin \phi \\ d\bar{z}/d\bar{t} &= \beta_\parallel \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中

$$\phi = \tan^{-1}(\beta_y/\beta_x) \quad (6)$$

可以利用电子计算机对上述归一化方程(5)式进行数值求解。通过给定不同的初始参量就可以求得不同的电子运行轨道，并可分析这些轨道中存在的某些规律性。

三、数值计算结果及其分析

我们知道，电子在静电离心系统中作圆轨道运动的条件是

$$m_0 v_{\perp 0}^2 = |e| V_0 / \ln(b/a) \quad (7)$$

$$\mathbf{v}_{\perp 0} = v_{\perp 0} \mathbf{e}_\phi \quad (8)$$

为了使电子做非圆轨道运动,可以改变 $v_{\perp 0}$ 、 V_0 或电子的初始横向注入角。在我们的计算中,是通过改变电子的横向初始注入角来使电子做非圆轨道运动的。需要指出的是,从(1)式可以看出,只要静电系统中的电压 V_0 和电子的初始横向注入速度满足(7)式和(8)式,则电子均做圆轨道运动而与电子的初始注入径向位置 R_0 无关。不过,电子的圆轨道运动的频率 $\omega = v_{\perp 0}/R_0$ 会随 R_0 的变化而变化。

我们用哈明方法对归一化运动方程(5)式进行了大量的数值计算,得到了一系列关于轨道形状和轨道周期性规律及其随注入参量变化的数据结果,如图 1、表 1 和表 2 所示。图 1 给出了几个典型的电子轨道。表 1 和表 2 示出了数值研究过程中发现的几个关于电子轨道的周期特征的重要规律。表中的参量 α 、 T_R 、 T_ϕ 的意义分别是: $\alpha = \tan^{-1}(-\beta_{y0}/\beta_{x0})$, 这里 β_{x0} 、 β_{y0} 为电子的横向注入速度; T_R 表示电子轨道运动的径向周期,即电子轨道经过两相邻远地点 (R_{\max}) 或两相邻近地点 (R_{\min}) 所需的运动时间; T_ϕ 表示电子的角向运动周期,即电子轨道在角向每变化 360° 所需的运动时间。

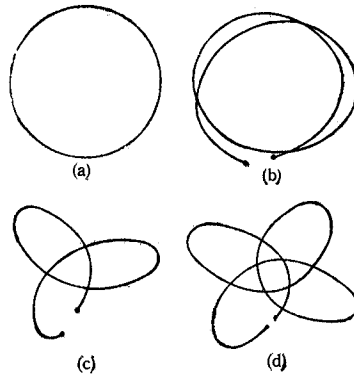


图 1 静电离心系统中电子运动的几个典型轨道

(a) 圆轨道计算参量: $\alpha = 90^\circ$, $\beta_{\perp} = 0.15$, $\beta_{\parallel} = 0.04$, $\bar{b}/\bar{a} = 20$, $\bar{R}_0 = 0.255$, $\bar{b} = 1.480$, $\bar{V}_0 = 0.068$ (b) 非圆轨道计算参量: $\alpha = 80^\circ$, 其它参量同(a) (c) 三叶式轨道计算参量: $\alpha = 30^\circ$, 其它参量同(a) (d) 四叶式轨道计算参量: $\alpha = 35^\circ$, $\beta_{\perp} = 0.65$, $\bar{V}_0 = 1.668$, 其它参量同(a)

表 1 电子的横向注入角度对电子轨道运动周期性的影响

(计算参量: $\beta_{\perp} = 0.15$, $\beta_{\parallel} = 0.04$, $\bar{R}_0 = 0.255$, $\bar{b}/\bar{a} = 20$, $\bar{b} = 1.486$, $\bar{V}_0 = 0.068$)

| $\alpha(^{\circ})$ | 90 | 85 | 75 | 65 | 55 | 45 | 35 | 25 |
|--------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| \bar{T}_R | / | 7.55 | 7.55 | 7.51 | 7.51 | 7.46 | 7.46 | 7.46 |
| \bar{T}_ϕ | 10.66 | 10.49 | 10.66 | 10.66 | 10.71 | 10.74 | 11.02 | 11.26 |
| \bar{T}_R/\bar{T}_ϕ | / | 0.72 | 0.71 | 0.70 | 0.70 | 0.69 | 0.68 | 0.66 |

通过计算发现,电子在静电离心系统中做非圆轨道运动时,其径向和角向均存在周期性。我们又计算了电子的横向注入角 α 对电子轨道及运动周期的影响,如表 1 所示。从表 1 可以看出,当电子的总的横向注入速度和系统中所加的静电电压保持不变而改变电子的横向注入角时,如电子的运动轨道形状发生变化,电子轨道的径向和角向周期几乎不受影响。有趣的是,形状有差异甚至差异较大的轨道竟有几乎相同的轨道周期。

表 2 电子的横向注入速度和系统中所加的静电电压对电子轨道运动周期的影响
(计算参量 $\alpha = 45^\circ$, 其它参量同表 1)

| | | | | | | | | |
|------------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|--------|--------|--------|
| $\beta_{\perp 0}$ | 0.05 | 0.15 | 0.25 | 0.35 | 0.45 | 0.55 | 0.65 | 0.75 |
| \bar{V}_0 | 7.50×10^{-3} | 6.82×10^{-2} | 1.94×10^{-1} | 3.92×10^{-1} | 6.80×10^{-1} | 1.09 | 1.67 | 2.55 |
| $2\pi/\bar{\omega}_c$ | 22.67 | 7.60 | 4.60 | 3.34 | 2.66 | 2.24 | 1.96 | 1.78 |
| \bar{T}_R | 22.53 | 7.46 | 4.51 | 3.22 | 2.60 | 2.12 | 1.93 | 1.73 |
| \bar{T}_ϕ | 33.42 | 11.02 | 6.55 | 4.63 | 3.64 | 2.93 | 2.55 | 2.21 |
| \bar{T}_R/\bar{T}_ϕ | 0.67 | 0.68 | 0.69 | 0.70 | 0.71 | 0.72 | 0.76 | 0.78 |
| \bar{V}_0/\bar{V}_{01} | 1 | 9.09 | 25.87 | 52.27 | 90.67 | 145.33 | 222.67 | 340.00 |
| $(\bar{T}_{R1}/\bar{T}_R)^2$ | 1 | 9.12 | 24.96 | 48.96 | 75.09 | 112.94 | 136.27 | 169.60 |

表 2 给出了电子的横向注入速度和静电离心系统中所加的静电电压一起变化时, 电子的运动参量的变化情况。从表 2 中可以发现, 电子运动的径向周期 \bar{T}_R 与 $2\pi\bar{R}_0/(\beta_{\perp 0}\sqrt{2-\beta_{\perp 0}^2})$ 近似相等, 即

$$\bar{T}_R \approx 2\pi\bar{R}_0/(\beta_{\perp 0}\sqrt{2-\beta_{\perp 0}^2}) = 2\pi/\bar{\omega}_c \quad (9)$$

其中 $\bar{\omega}_c = \sqrt{2-\beta_{\perp 0}^2}\omega_0$ 为静电离心系统中电子的特征振荡频率^[7], $\omega_0 = \beta_{\perp 0}/\bar{R}_0$ 为电子以 90° 的横向注入角入射时电子的回旋频率。这表明静电离心系统中做非圆轨道运动的电子, 其径向周期运动与系统中电子的特征振动相对应。另外, 从表 2 还可以发现, 当 $\beta_{\perp 0} \leq 0.35$ 时, 电子运动的径向周期与系统中所加的静电电压有如下的关系:

$$\bar{V}_0/\bar{V}_{01} \approx (\bar{T}_{R1}/\bar{T}_R)^2 \quad (10)$$

或

$$\bar{T}_R \propto 1/\sqrt{\bar{V}_0} \quad (11)$$

即当 $\beta_{\perp 0} \leq 0.35$ 时, 电子运动的径向周期与系统中所加的静电电压的平方根成反比。

此外, 观察表 1 和表 2 中的 \bar{T}_R/\bar{T}_ϕ 的值, 可以看到, 当系统中电子的横向注入速度、横向注入角或所加的静电电压改变时, \bar{T}_R 与 \bar{T}_ϕ 的比值近似为一常数, 即

$$\bar{T}_R/\bar{T}_\phi \approx \text{const} \quad (12)$$

(9) 式和(10)式为计算静电离心系统中电子的复杂轨道的径向和角向周期运动的周期提供了一个十分简单的途径。这对于采用非圆轨道电子注的静电电子回旋谐振脉塞及静电自由电子激光器的研究工作是非常有用的。

四、讨 论

1. 圆、近圆和本文研究的非圆轨道的比较

首先应指出, 只有在满足(1)和(2)式的情况下, 电子才做圆轨道运动。其次, 我们发现, 当 $\nu_{\perp 0}$ 或 V_0 或 α 偏离(1)和(2)式规定值的十分之一或更小的情况下, 电子的轨道可以作为近圆轨道处理。反之, 当这些参量的偏离值较大时, 电子的轨道就不能作为近圆轨道处理了。例如, 从图 1 可以看出, 当 $\alpha = 80^\circ$ 时的电子轨道可以作为近圆轨道处理。

需要指出的是, 在本文的研究当中, 既考虑了近圆的非圆轨道, 也考虑了远离圆的非

圆轨道,所以本文研究得到的规律对于各种非圆轨道运动都是适用的。

2. $v_{\perp 0}$ 、 V_0 不满足(1)式时的非圆轨道运动分析

在 $v_{\perp 0}$ 、 V_0 不满足(1)式时,无论电子的初始注入角 α 取何值,电子的轨道都是非圆轨道。在这种情况下,根据能量守恒定律,我们总可以在电子的轨道上找到一点 $(v'_{\perp 0}, R'_0, \alpha'_0)$:

$$\left. \begin{aligned} v'_{\perp 0} &= \sqrt{|e|V_0/[m_0 \ln(b/a)]} \\ R'_0 &= a \exp \left[\frac{m_0(v_{\perp 0}^2 - v'^2_{\perp 0})}{2|e|V_0} \ln(b/a) + \ln(R_0/a) \right] \\ 0 &< \alpha'_0 < \pi \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

显然, $v'_{\perp 0}$ 是满足(1)式的,所以这种情况可以转化为我们上面所讨论的问题。这时,根据上面得到的结论,可以推出电子径向位置 R 的变化周期为

$$T_R = 2\pi R'_0 / [v'_{\perp 0} \sqrt{2 - \beta'^2_{\perp 0}}] \quad (14)$$

3. 极限情况下,数值分析结果与理论推导公式的比较

我们考虑初始时电子无横向注入速度的情况。这时,设电子的初始位置为 R_0 ,则在考虑内导体的阻挡的情况下,电子将在静电离心系统中做上下摆动运动,其摆动周期为 T_R 。这时根据上述的第二点讨论,不难求得

$$T_R = 2\pi R_0 / [\sqrt{e} \cdot \sqrt{|e|V_0/[m_0 \ln(b/a)]} \cdot \sqrt{2 - \beta'^2_{\perp 0}}] \quad (15)$$

式中 \sqrt{e} 中的 e 为自然对数的底数, $\beta'_{\perp 0} = v'_{\perp 0}/c$, $v'_{\perp 0}$ 由(1)式给出。当 $v'_{\perp 0} \ll c$ 时,注意到 $\sqrt{\pi}/\sqrt{e} \approx 1.075 \approx 1$,则(15)式可以化为

$$T_R \approx R_0 / \sqrt{|e|V_0/[2\pi m_0 \ln(b/a)]} \quad (16)$$

另外,在非相对论情况下,对于 $v_{\perp 0} = 0$ 的情况,由运动方程直接进行积分可以得到如下的严格公式:

$$T_R = 2 \int_0^{R_0} dR / \sqrt{2|e|V_0 \ln(R_0/R)/(m_0 \ln(b/a))} = R_0 / \sqrt{|e|V_0/(2\pi m_0 \ln(b/a))} \quad (17)$$

以上分析表明,数值分析得到的结果(16)式与严格的积分公式(17)式是一致的。这给本文的数值研究结果提供了一个有力的支持。

五、结 论

关于静电离心系统中电子非圆轨道运动的规律可得以下四点重要结论:

- (1) 电子的非圆轨道运动在径向和角向均具有周期性,且这些周期性只与电子的横向注入速度值以及系统中所加的静电压有关,而与电子的横向注入角几乎无关。
- (2) 在不同的运动参量下,电子运动的径向周期与角向周期之比接近于一个常数。
- (3) 当电子运动的横向速度较小($\beta_{\perp 0} \leq 0.35$)时,电子运动的径向周期与系统中所加的静电压的平方根成反比。

(4) 电子运动的径向周期近似等于静电离心系统中电子的特征振荡周期。

参 考 文 献

- [1] 刘盛纲、张世昌、杨中海、陈晓东、欧阳征标, *J. Appl. Phys.*, **59** (1986)11, 3621—3626.
- [2] 刘盛纲, *中国科学 (A)*, **29** (1986) 6, 657—661.
- [3] 刘盛纲、欧阳征标, *Phys. Fluids*, **31** (1988) 4, 1280—1285.
- [4] 刘盛纲、欧阳征标、陈晓东, *IEEE Trans. on PS*, **PS-16** (1988) 2, 275—280.
- [5] I. Alexeff, F. Dyer, *Phys. Rev. Lett.*, **45** (1980) 5, 351—353.
- [6] M. Rader, F. Dyer I. Alexeff, *IEEE Trans. on PS*, **PS-15** (1987) 1, 56—60.
- [7] 欧阳征标, 一类新型电子回旋谐振脉塞的理论与实验研究以及一类新型自由电子激光器的研究, 电子科技大学博士论文, 成都, 1988年5月.
- [8] 刘盛纲, *物理学报*, **15**(1959)11, 575—580.
- [9] 刘盛纲, *物理学报*, **22**(1966)2, 233—241.
- [10] R. H. Hooverman, *J. Appl Phys.*, **34** (1963) 12, 3505—3509.

NUMERICAL INVESTIGATION OF THE REGULARITY OF NON-CIRCULAR MOTION OF ELECTRONS IN AN ELECTROSTATIC CENTRIFUGAL SYSTEM

Ouyang Zhengbiao
(Shenzhen University, Shenzhen)

Abstract The regularity of electron motion with non-circular orbits in an electrostatic centrifugal system is investigated. Through extensive numerical computation, analysis and investigation, the following results are obtained: there exist radial and azimuthal periodicities in the non-circular orbit motion of electrons in the system and these periodicities are related to the transverse injection velocity and position of the electrons and the electrostatic voltage applied in the system but have little relation to the transverse injection angle of the electrons; the ratios between the radial and the azimuthal periods of the electron motion under different parameters approach to the same constant; if the injecting transverse electron velocity is less than $0.35c$, the radial period of the electron motion is inversely proportional to the square root of the electrostatic voltage applied in the system; and the radial periods of electron motion in the system are equal to those of the corresponding characteristic oscillation of the electrons in the electrostatic centrifugal system.

Key words Electrostatic centrifugal system; Electron motion; Numerical analysis