

基于小波分析的分形参数估计新方法

陆伟宏 卢鹏飞

(江南大学通信和控制工程学院 无锡 214036)

摘要: 该文研究目的是估计 $1/f$ 类分形随机过程参数矢量 $(\beta, \sigma^2, \sigma_w^2)$ 。作者基于小波分析, 对 $1/f$ 过程观测值的小波系数方差进行一系列代数运算, 并给出详尽的证明过程, 最终求取了噪声中分数布朗运动(fBm)参数矢量的估计量。实验结果表明, 与传统的极大似然估计(ML)相比, 算法简洁, 效果良好, 估计参数范围广泛, 同时对噪声也不再局限于高斯分布。

关键词: 分形随机过程, 参数估计, 分数布朗运动, 小波分析

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2005)10-1527-04

A New Parameter Estimation of (1/f)-Type Fractal Signal Based on Wavelet Analysis

Lu Wei-hong Lu Peng-fei

(School of Communication and Control Engineering, Southern Yangtze University, Wuxi 214036, China)

Abstract The research purpose of this paper is to estimate the parameter vector $(\beta, \sigma^2, \sigma_w^2)$ of $(1/f)$ -type fractal stochastic processes. Using wavelets, the paper has performed a series of algebraic operation to the variance of the observation wavelet coefficients of $1/f$ process, and presented the elaborate theoretical analysis. As a result, the parameter vector of fractional Brownian motions (fBm) in noise is introduced. The experimental results demonstrate that the new estimator is far simpler and more effective than the traditional ML estimator and the range of estimate parameter is wider. Moreover the distribution of noise is not restricted within Gauss processes.

Key words Fractal stochastic process, Parameter estimation, fractional Brown motion, wavelet analysis

1 引言

$1/f$ 类分形信号是一种常见的随机过程。它具有不平稳、自相似性、长程相关性、 $1/f$ 类型的谱密度等特性, 为大量应用领域提供了重要模型。显然, 首要的任务应是由观察样本估计在噪声中分形过程的参数。1992 年, Wornell 和 Oppenheim 提出的极大似然估计(ML)方法^[1]是比较常用的计算 $1/f$ 类分形信号参数的方法。然而, 该算法不仅极为繁复, 而且有一定的局限性, 特别在人们感兴趣的领域反而不相合。1998 年, Ninness 已经证明^[2], 当存在噪声时 ML 算法仅当谱指数 $\gamma \in (0,1)$ 时才是相合估计, 否则会以概率 1 收敛到错误结果。这是一个令人沮丧的结论。尽管 $1/f$ 分形过程模型并非唯一, 但是 Mandelbrot 定义的分形 Brown 运动 (fBm)^[3] 至今还是 $1/f$ 过程唯一的优良模型。可是它的 Hurst 指数 H 恰好是 $H \in (0,1)$, $\gamma = 2H + 1$, 即 $\gamma \in (1,3)$, 因此采用 ML 算法, γ 估计的非相合性很可能导致 σ^2 估计的错误。本文根据 $1/f$ 过程的小波系数在相关结构上的特点, 对 $1/f$ 过程观测值的小波系数方差进行一系列代数运算, 找到

了一

种行之有效的估计 $1/f$ 类分形随机过程参数 $(\beta, \sigma^2, \sigma_w^2)$ 的新算法, 当 $\gamma > 0$ 时, 它不仅可以证明是强相合估计量, 而且远较 ML 估计简单。模拟结果也充分表明这种算法的有效性和优越性, 所加噪声也并不局限于高斯白噪声。

2 $1/f$ 过程的小波分析^[1,4]

设 $x(t)$ 为非平稳零均值高斯分布的 $1/f$ 分形随机过程, $w(t)$ 是与 $x(t)$ 统计独立的加性平稳高斯白噪声, 观察信号 $r(t)$ 为

$$r(t) = x(t) + w(t), \quad t \in (-\infty, \infty) \quad (1)$$

$x(t)$ 的尺度为 m ($m \in m_M = \{1, 2, \dots, M\}$) 时间为 k 的小波系数为

$$x_k^m = \langle x(t), \psi_k^m(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi_k^m(t) dt \quad (2)$$

其中

$$\psi_k^m(t) = 2^{m/2} \psi(2^m t - k) \quad (3)$$

x_k^m 的方差:

$$V(x_k^m) = \sigma^2 \beta^{-m} = \sigma^2 2^{-m\gamma} \quad (4)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_x^2}{|\omega|^r} |\Psi(\omega)|^2 d\omega \quad (5)$$

σ_x^2 是 $x(t)$ 的谱常数。 $x(t)$ 的分数维 D 和自相似 Hurst 指数 H 是

$$D = (5 - \gamma) / 2 = 2 - H \quad (6)$$

$r(t)$ 和 $w(t)$ 的小波系数为

$$r_k^m = \langle r(t), \psi_k^m(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} r(t) \psi_k^m(t) dt = x_k^m + w_k^m \quad (7)$$

$$w_k^m = \langle w(t), \psi_k^m(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} w(t) \psi_k^m(t) dt \quad (8)$$

r_k^m 的方差为

$$V(r_k^m) = \sigma_m^2 = \sigma^2 \beta^{-m} + \sigma_w^2 \quad (9)$$

其中 σ_w^2 是 w_k^m 的方差。

3 在噪声中 $1/f$ 分形过程参数的相合估计

作为 $1/f$ 过程优良模型的 fBm, 它是唯一具有自相似分形特性的高斯过程, 可是其 Hurst 分形参数恰好是 $H \in (0, 1)$, 即 $\gamma \in (1, 3)$ 。当存在噪声时 ML 算法仅当谱指数 $\gamma \in (0, 1)$ 才是相合估计, 否则会以概率 1 收敛到错误结果, 因此 ML 估计不适用于噪声中 fBm 的参数估计。这就迫使人们寻找 $1/f$ 分形过程参数估计的新方法。

设 $B_H(t)$ 为 fBm,

$$B_H(t) = \frac{\sigma_B^2}{\Gamma(H+1/2)} \left\{ \int_{-\infty}^0 (|t-\xi|^{H-1/2} - |\xi|^{H-1/2}) dB(\xi) + \int_0^t |t-\xi|^{H-1/2} dB(\xi) \right\} \quad (10)$$

其中 $B(t)$ 是布朗运动, $H \in (0, 1)$, $B_H(t)$ 是非平稳零均值高斯随机过程。记 $x(t) = B_H(t)$, $w(t)$ 是与 $x(t)$ 统计独立的加性平稳白噪声, 观察过程同式(1)。

根据 fBm 的性质,

$$E\{B_H(t)B_H(s)\} = \frac{\sigma_H^2}{2} (|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}) \quad (11)$$

设 $B_H(t)$ 的小波系数为 x_k^m , 由小波 $\psi(t)$ 的容许条件以及式(11), 易得式(12)^[5]:

$$E\{x_k^m x_j^n\} = -\frac{\sigma_H^2}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} A_\psi(2^{m-n}, \tau - 2^{m-n}j + k) |\tau|^{2H} d\tau \right] \times (2^{-m})^{2H+1} \quad (12)$$

其中

$$A_\psi(\alpha, \beta) = (\alpha)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \psi(\alpha t - \beta) dt \quad (13)$$

由式(4)可得, x_k^m 的方差为

$$V(x_k^m) = (\sigma_H^2/2) U_\psi(H) (2^{-m})^{2H+1} = (\sigma_H^2/2) U_\psi(H) (2^{-m})^\gamma \quad (14)$$

这里

$$U_\psi(H) = -\int_{-\infty}^{\infty} A_\psi(1, \tau) |\tau|^{2H} d\tau \quad (15)$$

$$\gamma = 2H + 1 \quad (16)$$

同理, 由式(9)可得, $r(t)$ 的小波系数 r_k^m 的方差为

$$V(r_k^m) = \frac{\sigma_H^2}{2} U_\psi(H) (2^{-m})^\gamma + \sigma_w^2 = \sigma^2 (2^{-m})^\gamma + \sigma_w^2 = \sigma_m^2 \quad (17)$$

依据式(17), 由 $\gamma \neq 0$ 可得

$$\gamma = \log_2 \left[\frac{V(r^m) - V(r^{m-1})}{V(r^{m+1}) - V(r^m)} \right] \quad (18)$$

记 γ 的估计量取为

$$\hat{\gamma} = \log_2 \left(\frac{\hat{\sigma}_m^2 - \hat{\sigma}_{m-1}^2}{\hat{\sigma}_{m+1}^2 - \hat{\sigma}_m^2} \right) \quad (19)$$

式中

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{N(i)} \sum_{k=1}^{N(i)} (r_k^i)^2, \quad i = m-1, m, m+1 \quad (20)$$

$\hat{\sigma}_m^2$ 是尺度 m 下的样本方差, 即为 $V(r^m)$ 的估计量, $N(m)$ 是尺度为 m 时的可用数据的总数。

分维数 D 的估计量为

$$\hat{D} = (5 - \hat{\gamma}) / 2 \quad (21)$$

根据式(17)

$$\sigma^2 = \frac{V(r^m) - V(r^{m-1})}{(2^{-m})^\gamma (1 - 2^\gamma)} \quad (22)$$

可得 σ^2 的估计量:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\sigma}_m^2 - \hat{\sigma}_{m-1}^2}{2^{-m\hat{\gamma}} (1 - 2^\gamma)} \quad (23)$$

同理可得 σ_w^2 的估计量:

$$\hat{\sigma}_w^2 = \hat{\sigma}_m^2 - \hat{\sigma}^2 2^{-m\hat{\gamma}} \quad (24)$$

由矩估计的函数性质易得 $(\beta, \sigma^2, \sigma_w^2)$ 的估计量式(19), (23)和(24)的相合性。

设 $\{r_1^m, \dots, r_{N(m)}^m\}$ 是独立同分布(iid)随机变量集合, 且 r_k^m 的方差 $V(r^m) = \sigma^2 (2^{-m})^\gamma + \sigma_w^2$ 有界, 则 $V(r^m)$ 矩估计:

$$\hat{\sigma}_m^2 = \frac{1}{N(m)} \sum_{k=1}^{N(m)} (r_k^m)^2 \quad (25)$$

是强相合估计。若满足 $\sigma^2 \neq 0$, $\gamma \neq 0$, $\hat{\sigma}_m^2 - \hat{\sigma}_{m-1}^2 \neq 0$, $\hat{\sigma}_{m+1}^2 - \hat{\sigma}_m^2 \neq 0$, 由于 $y = \log_2 x$ 是连续函数, 则估计量 $\hat{\gamma}$ 是 γ 的强相合估计。同理, 当 $\gamma \neq 0$, $\hat{\gamma} \neq 0$ 时, $\hat{\sigma}^2$ 是 σ^2 的强相合估计, $\hat{\sigma}_w^2$ 是 σ_w^2 的强相合估计。

很显然, 要求 $\hat{\sigma}_m^2$ 是强相合估计量, $\{r_1^m, \dots, r_{N(m)}^m\}$ 就必须是 iid 随机变量集合。由 fBm 的小波系数性质可知, x_j^m 和 x_k^n 的互相关 $R_x(m, n; j, k)$ 衰减速率为 $O\left(|2^{-m}j - 2^{-n}k|^{2(H-M)}\right)$ ^[6], 其中 H 是 Hurst 指数, M 是小波 $\psi(t)$ 的正规性条件(消失矩):

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^m \psi(t) dt = 0, \quad m = 0, 1, \dots, M-1 \quad (26)$$

小波变换对自相似的 $1/f$ 过程有很强的去相关作用, 只要小波 $\psi(t)$ 的 M 足够地大, fBm 互相关衰减速率远快于其自身

的自相关衰减速率，就可以十分近似地满足 $\{r_1^m, \dots, r_{N(m)}^m\}$ 的独立性条件。甚至对于某些小波(例如 Meyer 小波)，其小波系数之间是完全不相关的，也就是说 $\{r_1^m, \dots, r_{N(m)}^m\}$ 是 iid 随机变量集合的， $\hat{\sigma}_m^2$ 即为强相合估计。

图 1 和图 2 是采用 Wornell 和 Oppenheim^[1] 提出的极大似然估计(ML)方法仿真而得的结果：从图 1 和图 2 可以明显看出，当谱指数 $\gamma = 0.6$ 时，其期望基本上是一条水平直线，而且估计值收敛于准确值 0.6，实验结果显示其是相合估计；当谱指数 $\gamma = 1.8$ 时，随着 M 的不断增大，其估计值却不是收敛于准确值 1.8，而是收敛于愈来愈小的错误值，实验结果显示其是非相合的。(1998 年，Ninness^[2] 已经理论验证了这一结果)。

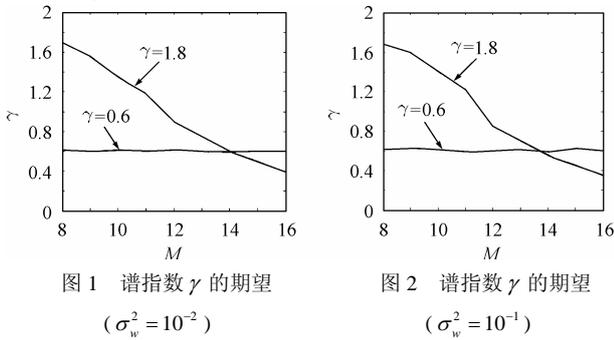


图 1 谱指数 γ 的期望 ($\sigma_w^2 = 10^{-2}$)

图 2 谱指数 γ 的期望 ($\sigma_w^2 = 10^{-1}$)

4 数值结果与分析

为便于比较，采用的模拟方案与 Ninness 的方法类似，fBm 的样本利用小波方法产生^[4]。先选择一组正交归一化的小波基 $\psi_{mk}(t) = 2^{m/2} \psi(2^m t - k)$ ，再取一组互不相关或是相关很小的零均值随机变量作为 $x(t)$ 的小波系数 x_k^m ，且要求其方差在不同 m 值下满足：

$$\text{var}(x_k^m) = \sigma^2 (2^{-m})^\gamma$$

然后构造

$$x_M(t) = \sum_{m=0}^M \sum_k x_k^m \psi_{mk}(t) \tag{27}$$

$$x(t) = \lim_{M \rightarrow \infty} x_M(t) \tag{28}$$

$x_M(t)$ 便是 $1/f$ 过程 $x(t)$ 的小波变换的近似表达式，即为近似的 $1/f$ 过程， M 愈大愈接近于 $x(t)$ 。所选用的小波应具有高阶原点矩为零的特点，而且阶次愈高愈好(至少要满足消失矩 $M \geq \gamma/2$ ， γ 是待仿真 $1/f$ 过程的谱特性参数)。观察信号 $r(t)$ 如式(1)所示， $w(t)$ 是白噪声，当 $w(t)$ 为 Gauss 分布时， $\{r_1^m, \dots, r_{N(m)}^m\}$ 在小波消失矩 M 足够大时才能保证是 iid 随机变量集合，而 $w(t)$ 为 Rayleigh 分布和对数 Gauss 分布时就不一定能保证了。以下就对这 3 种噪声分布进行数值仿真，小波分别使用 10 阶 Daubechies 小波(db10)，5 阶 Daubechies 小波(db5)和 Meyer 小波(meyer)， $\sigma^2 = 500$ ， $\gamma = 0.6$ 和 1.8， $\sigma_w^2 = 10^{-2}$ 和 10^{-1} ，数据长度 $N = 2^M$ ， $M \in [10, 16]$ 。

很显然，本文提出的分形参数的相合估计是十分有效的。从 10 阶 Daubechies 小波和 5 阶 Daubechies 小波比较可以看出只要小波 $\psi(t)$ 的消失矩 M 足够大，那么对谱指数 γ 的估计也就愈精确。Meyer 小波由于小波系数之间是完全不相关的，它能保证 $\hat{\sigma}_m^2$ 为强相合估计，因此对谱指数 γ 的估计也相当精确。从白噪声 $w(t)$ 取的 3 种噪声分布来看，估计效果还是 Gauss 分布要较 Rayleigh 分布和对数 Gauss 分布稍好一些。毕竟当白噪声 $w(t)$ 为 Gauss 分布时， $\{r_1^m, \dots, r_{N(m)}^m\}$ 在小波消失矩 M 足够大时能够保证是 iid 随机变量集合，另外两种噪声分布则无法满足这一条件。

图 3 和图 4 是采用本文提出的相合估计方法仿真而得的结果(白噪声 $w(t)$ 为 Gauss 分布)：

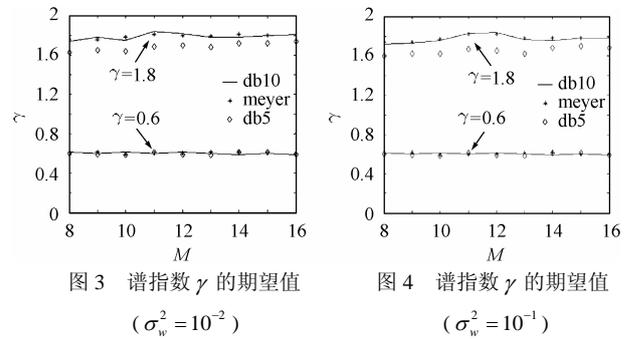


图 3 谱指数 γ 的期望值 ($\sigma_w^2 = 10^{-2}$)

图 4 谱指数 γ 的期望值 ($\sigma_w^2 = 10^{-1}$)

图 5 和图 6 是采用本文提出的相合估计方法仿真而得的结果(白噪声 $w(t)$ 为 Rayleigh 分布)：

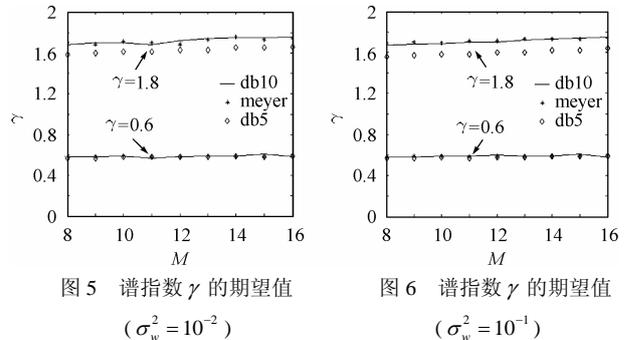


图 5 谱指数 γ 的期望值 ($\sigma_w^2 = 10^{-2}$)

图 6 谱指数 γ 的期望值 ($\sigma_w^2 = 10^{-1}$)

图 7 和图 8 是采用本文提出的相合估计方法仿真而得的结果(白噪声 $w(t)$ 为对数 Gauss 分布)：

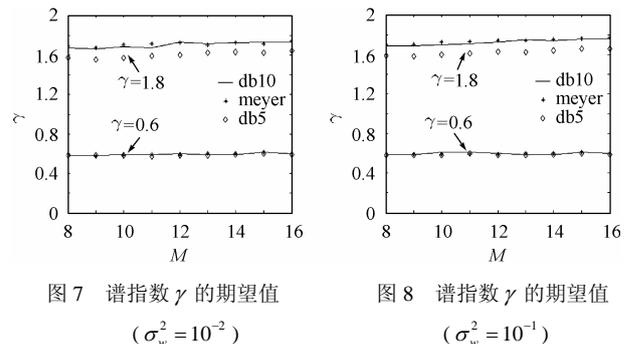


图 7 谱指数 γ 的期望值 ($\sigma_w^2 = 10^{-2}$)

图 8 谱指数 γ 的期望值 ($\sigma_w^2 = 10^{-1}$)

5 结 论

$1/f$ 类分形信号是非平稳的, 难以采用传统的信号分析工具进行分析。至今, 国际上未见有文献提出具有实用价值的估计分形信号的新方法。本文基于小波分析, 对噪声中 $1/f$ 分形过程观测值小波系数方差进行了一系列巧妙的代数运算, 找到了一种行之有效的估计分形参数 $(\beta, \sigma^2, \sigma_w^2)$ 的算法, 并给出了详尽的证明过程。同时与估计 $1/f$ 类分形信号经典 ML 方法作了详细比较, 从仿真结果明显可以看出, 新算法远比 ML 方法简洁、有效、实用, 全面弥补了 ML 方法的不足之处, 尤其是估计参数范围广泛, 噪声不局限于高斯分布这两点使人们特感兴趣。

参 考 文 献

- [1] Wornell G, Oppenheim A. Estimation of fractal signals from noise measurements using wavelets[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1992, 40(3): 611 – 623.
- [2] Ninness B. Estimation of $1/f$ noise. *IEEE Trans. on Info. Theory*, 1998, 44(1): 32 – 46.
- [3] Mandelbrot B, Van Ness J. Fractional Brownian motions fractional noises and applications[J]. *SIAM Rev.* 1968, 10(4): 422 – 423.
- [4] Wornell G. Wavelet-based representation for the $1/f$ family fractal process. *Proc. IEEE*, 1993, 81(1): 1428 – 1450.
- [5] Flandrin P. Wavelet analysis and synthesis of fractional Brownian motion. *IEEE Trans. on Info. Theory*, 1992, 38(2): 910 – 917.
- [6] Tewfik A H, Kim M. Correlation structure of the discrete wavelet coefficients of fractional Brownian motion. *IEEE Trans. on Info. Theory*, 1992, 38(2): 904 – 909.

陆伟宏: 男, 1979 年生, 硕士生, 研究方向为信号处理.

卢鹏飞: 男, 1945 年生, 副教授, 研究方向为信号与信息处理.