电子科学学刊
JOURNAL OF ELECTRONICS

基于 Bayes 决策的组合中值滤波 [1]

宋焕生 梁德群 * 刘春阳 * 吴成柯

(西安电子科技大学一系 西安 710071)
*(西安交通大学电子与信息工程学院 西安 710049)

摘 要 针对图象滤波中的滤噪和细节保护的矛盾，提出了基于 Bayes 决策的组合中值滤波技术. 内容有：(1) 导出了测试向量的联合分布密度函数；(2) 提出了先验概率的一种估计算法，该算法具有一定的普遍应用意义；(3) 基于 Bayes 决策，将标准中值滤波器 (MF) 和多级中值滤波器 (MLM) 组合应用，给出一种效果优良的组合中值滤波器结构.

关键词 图象处理，中值滤波， Bayes 决策，顺序统计

中图号 TN713, TN911.73

1 引 言

在图象滤波中，得到广泛应用的中值类滤波器 [1−5] 往往存在着滤噪和细节保护的矛盾. 例如，标准中值滤波器 (MF)[1] 的滤噪性能被证明在堆滤波器 (Stack filters) 中是最优的 [2]，但它对图象细节结构的破坏也最为严重，因此 MF 滤波器适合于图象的“光滑”区域，而不适合图象中含有丰富细节结构的区域；相对地，多级中值滤波器 (MLM)[3,4] 虽然能很好地保护图象细节，但滤噪能力却很差，因此它适合于含有丰富细节结构的区域，而不适合图象的“光滑”区域. 很自然，如果 MF 和 MLM 滤波器结合应用，则可望得到好的滤波效果，这实际上就是一种组合中值滤波器 (CM)[5] 结构.

组合中值滤波器的本质是借助某种测试对图象局部区域作出分类决策，然后据此在不同种类的图象区域分别使用选定的滤波器中的最适合的一种. 这里有效的测试和决策策略是问题的关键.

本文提出基于 Bayes 决策的组合中值滤波器，新的工作包括：(1) 由两个 Dixon[6] 比率构成一个新的测试向量，并导出了该测试向量在常数加噪声图象条件下的联合分布密度函数；(2) 决策策略采用 Bayes 决策，而源于 Bayes 决策的需要，提出了先验概率的一种估计算法，这种算法在 Bayes 决策的应用中有一定的普遍应用意义；(3) 基于 Bayes 决策，将 MF 和 MLM 滤波器组合应用，提出一种组合中值滤波器结构.

2 测试向量及其联合分布

定义 1 H_0 表示滤波窗口位于图象“光滑”区域；H_1 表示滤波窗口位于图象“细节”区域. 由于最终只需给出 H_0 成立或者是 H_1 成立的二择一决策，所以，可以假设 H_0, H_1 为对立事件.

[1] 1996-02-08 收到， 1997-05-13 定稿
国家自然科学基金 (批准号 69575014) 资助课题

定义 2　$a(\cdot,\cdot)$ 为离散图象信号，用于 H_0 、 H_1 决策的一种子窗口定义为

$$\left.\begin{aligned}
W_1'(n_1,n_2)&=\{a(n_1+k,n_2): & -N\le k<0 \text{ 或 } 0<K\le N\},\\
W_2'(n_1,n_2)&=\{a(n_1,n_2+k): & -N\le k<0 \text{ 或 } 0<K\le N\},\\
W_3'(n_1,n_2)&=\{a(n_1+k,n_2+k): & -N\le k<0 \text{ 或 } 0<K\le N\},\\
W_4'(n_1,n_2)&=\{a(n_1+k,n_2-k): & -N\le k<0 \text{ 或 } 0<K\le N\}.
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

当 H_0 成立时， (1) 式定义的各子窗口具有相同的统计特性，而当 H_0 不成立 (也就是 H_1 成立) 时，“匹配”图象细节结构的子窗口与其它子窗口的统计特性会有显著差异，这是对事件 H_0 和 H_1 决策的依据。

选择各子窗口的中值：

$$Z_i'(n_1,n_2)=\operatorname{med}[a(\cdot,\cdot)\in W_i'(n_1,n_2)],\quad i=1,2,3,4 \tag{2}$$

作为描述其统计特性的参数。

H_1 成立时，在 $\{Z_i':i=1,2,3,4\}$ 中反映为有 1 个或几个对应于图象细节的异常值，而当 H_0 成立时，由于各子窗口的统计特性相同，所以 $\{Z_i':i=1,2,3,4\}$ 中不存在任何异常值。异常值的存在与否可以用 Dixon 比率 [6] 测试。具体对于 (1) 式定义的子窗口，可以有如下 Dixon 比率：

$$r_1=(Z_{(1)}'-Z_{(2)}')/(Z_{(1)}'-Z_{(4)}'),\quad r_2=(Z_{(2)}'-Z_{(3)}')/(Z_{(1)}'-Z_{(4)}'), \tag{3}$$

其中 $Z_i':(i=1,2,3,4)$ 表示将 $\{Z_i':i=1,2,3,4\}$ 由大到小排序后的第 i 个值，以上 (及以后) 为了书写简明省略了滑移窗口坐标 “ (n_1,n_2) ”。

定义 3　测试向量

$$\boldsymbol{R}=(r_1,r_2). \tag{4}$$

在滤波窗口足够大而且输入为独立同分布 (i. i. d) 随机过程时，中值滤波输出服从正态分布，所以可以假设，在 H_0 成立时， $Z_i':(i=1,2,3,4)$ 服从相同而且彼此独立的正态分布，这时我们有以下结论。

定理 1　如果 $Z_{(1)}'\ne Z_{(2)}'\ne Z_{(3)}'\ne Z_{(4)}'$ ，则在 H_0 条件下， r_1,r_2 的条件联合分布密度为

$$g(r_1,r_2|H_0)=\begin{cases}24/[\pi(3r_1^2+3r_2^2+2r_1r_2-4r_1-4r_2+4)^{3/2}], & 0<r_1,r_2 \text{ 及 } r_1+r_2<1;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases} \tag{5}$$

证明　在 H_0 条件下， $Z_i'(i=1,2,3,4)$ 独立且服从相同的正态分布，设该正态分布的方差和数学期望分别为 σ^2 和 μ ，并令

$$X_i=(Z_i'-\mu)/\sigma,\quad i=1,2,3,4. \tag{6}$$

用 $X_{(i)}(i=1,2,3,4)$ 表示将 $\{X_i:i=1,2,3,4\}$ 由大到小排序后的第 i 个值，则容易得到 $\{x_{(i)}:i=1,2,3,4\}$ 的条件联合分布密度为

$$q(x_{(1)},x_{(2)},x_{(3)},x_{(4)}|H_0)=\sum_{p=1}^{4!}f(x_1^p)f(x_2^p)f(x_3^p)f(x_4^p)=4!f(x_{(1)})f(x_{(2)})f(x_{(3)})f(x_{(4)}), \tag{7}$$

其中 $f(\cdot)$ 表示标准正态分布密度函数，$\{(x_1^p,x_2^p,x_3^p,x_4^p):p=1,\cdots,4!\}$ 表示 $(x_{(1)},x_{(2)},x_{(3)},x_{(4)})$ 的所有排列方式。

显然，测试参量：

$$r_1=(x_{(1)}-x_{(2)})/(x_{(1)}-x_{(4)}),\quad r_2=(x_{(3)}-x_{(4)})/(x_{(1)}-x_{(4)}). \tag{8}$$

令 $x=x_{(1)}, v=x_{(1)}-x_{(4)}$，则

$$x_{(1)}=x;\quad x_{(2)}=x-r_1v;\quad x_{(3)}=x-v+r_2v;\quad x_{(4)}=x-v. \tag{9}$$

将 (9) 式代入 (7) 式，得

$$\begin{aligned}g(r_1,r_2|H_0)&=\iint_{x,v}4!f(x)f(x-r_1v)f(x-v+r_2v)f(x-v)(\mathrm{d}x_{(1)}\mathrm{d}x_{(2)}\mathrm{d}x_{(3)}\mathrm{d}x_{(4)})/(\mathrm{d}r_1\mathrm{d}r_2)\\&=\iint_{x,v}4!f(x)f(x-r_1v)f(x-v+r_2v)f(x-v)|J|\mathrm{d}x\mathrm{d}v,\end{aligned} \tag{10}$$

其中 J 为 $(x_{(1)},x_{(2)},x_{(3)},x_{(4)})$ 空间到 (r_1,r_2,x,v) 空间的雅可比变换矩阵.

计算 (10) 式的定积分，并注意到 $x_{(1)}>x_{(2)}>x_{(3)}>x_{(4)}\Leftrightarrow 0<r_1,r_2$ 及 $r_1+r_2<1$，即得到 (5) 式。 证毕

3 先验概率估计算法

用 w、w_0 和 w_1 分别表示 r_1,r_2 的总体分布密度以及在 H_0,H_1 条件下的条件分布密度，通常 w 可以直接由图象统计近似得到. 这样，现在的问题就是由 w_0,w 估计 p_0,p_1 和 w_1.

算法 1 在已知 w_0,w 时，p_0 的估计 $\tilde{p}_0$ 为

$$\tilde{p}_0=\min_{x\in\Gamma}x, \tag{11}$$

其中

$$\Gamma=\{x|x\in(0,1)\ \text{且对所有的}\ r_1,r_2\ \text{有}\ (w-w_0x)/(1-x)\geq 0\}. \tag{12}$$

p_1,w_1 的估计 $\tilde{p}_1,\tilde{w}_1$ 为

$$\tilde{p}_1=1-\tilde{p}_0;\quad \tilde{w}_1=(w-w_0\tilde{p}_0)/(1-\tilde{p}_0). \tag{13}$$

定理 2 算法 1 中 p_0,p_1,w_1 的估计误差 $\Delta p_0,\Delta p_1,\Delta w_1$ 为

$$\Delta p_0=\tilde{p}_0-p_0=(1-p_0)/K;\Delta p_1=\tilde{p}-p_1=-(1-p_0)/K;\Delta w_1=\tilde{w}_1-w_1=(w_1-w_0)/(K-1), \tag{14}$$

其中 $K=\max_{r_1,r_2}(w_0/w_1)$。

证明 因为 H_0,H_1 为对立事件，所以

$$p_0+p_1=1;\quad w=w_0p_0+w_1p_1, \tag{15}$$

$$\Leftrightarrow\quad (w-w_0x)/(1-x)=[w_0(p_0-x)+w_1(1-p_0)]/(1-x) \tag{16}$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x \in (0,1), \\ (w - w_0 x)/(1-x) \geq 0 \text{ for all } r_1, r_2, \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 0 < x < 1, \\ p_0 + (1-p_0)/(w_0/w_1) \geq x > 0 \text{ for all } r_1, r_2, \end{Bmatrix}$$

$$\xleftrightarrow{1 > p_0, p_1 > 0; w_0, w_1 \geq 0} \begin{Bmatrix} 0 < x < 1, \\ (p_0 + (1-p_0)/(\max\limits_{r_1, r_2}(w_0/w_1)) \geq x > 0, \end{Bmatrix}$$

$$\xleftrightarrow{\max_{r_1,r_2}(w_0/w_1) > 1} \quad p_0 + (1-p_0)/K \geq x > 0 \Leftrightarrow \Gamma = (0, p_0 + (1-p_0)/K), \tag{17}$$

其中 $K = \max_{r_1,r_2}(w_0/w_1)$ 。

由 (11) 式和 (7) 式立即得到

$$\tilde{p}_0 = p_0 + (1-p_0)/K. \tag{18}$$

将 (18) 式代入 (13) 式并注意 (15) 式便可得到 (14) 式。 证毕

通常， K 远大于 1 。例如，当 w_0, w_1 为等方差而不等均值的高斯分布时， $K = \infty$ 。

4 基于 Bayes 决策的组合中值滤波器及实验结果

假设 H_0, H_1 的错判代价分别为 c_{10}, c_{01} ，在本文的滤波器设计中， c_{10}, c_{01} 分别反映滤噪和细节保护的重要程度。这时组合 MF 滤波器及 MLM 滤波器的组合中值滤波器 (CM) 输出 Y_{CM} 为

$$Y_{\mathrm{CM}} = \begin{cases} Y_{\mathrm{MF}}, & w_1/w_0 < kp_0/p_1; \\ Y_{\mathrm{MLM}}, & w_1/w_0 \geq kp_0/p_1; \end{cases} \tag{19}$$

其中 $k = c_{10}/c_{01}$ 。 k 是一个设定的参数，它起到控制细节保护和滤噪的折中的作用。

为验证本文内容，以下给出了本文提出的 CM 滤波器和 MF 滤波器， MLM 滤波器的对比实验结果。其中测试图象如图 1 所示，该图象为 256×256 大小， 256 灰度级。污染噪声为零均值，方差 225 的加性高斯噪声。滤波效果采用原图象和滤波输出图象的相对均方误差 (RMSE) 评价。

详细实验结果示于表 1 中，其中 “ * ” 指示同一窗口参数下的最好结果。

表 1 加噪图象的滤波结果

MF	.0128	.0122	.0169	.0229	.0290
MLM	.0131	.0100	.0092	.0090	.0096
CM/k=1.0	.0124	.0113	.0120	.0175	.0214
CM/k=0.5	.0120*	.0078*	.0095	.0097	.0102
CM/k=0.3	.0125	.0085	.0070*	.0081*	.0084
CM/k=0.2	.0130	.0092	.0076	.0083	.0080*
CM/k=0.1	.0130	.0100	.0084	.0091	.0094
	$N=1$	$N=2$	$N=3$	$N=4$	$N=5$

图 1 测试图象

5 结 论

本文提出基于 Bayes 决策的组合中值滤波器，在选定代价参数 k 后，这种滤波器可以得到滤噪和细节保护的最佳折中，代价参数 k 原则上可以取任意正实数，因而使滤波器设计有较大的灵活性．在偏重于滤噪时，k 取大的值，反之取小的值。另外，为了运用 Bayes 决策，本文给出了测试量的联合分布密度函数和先验概率的估计算法，这些研究虽然是针对图象滤波器设计的，但是理论上的一些结果有一定的普遍意义，比如先验概率的估计算法在类似条件下的 Bayes 决策问题中可以直接应用．

参 考 文 献

[1] Arce G A, Gallagher N C, Nodes T A. Median Filters: Theory and Application. Advances in Computer Vision and Image Processing, Vol.2, T. S. Huang, Ed. Greenwich, CT: JAI, 1986, 90–166.

[2] Yin L. Stack filter design: A structure approach. IEEE Trans. on SP, 1995, SP-43(4): 831–840.

[3] Arce G A, Foster R E. Detail-preserving ranked-order based filters for image processing. IEEE Trans. on PAMI, 1989, PAMI-37(1): 83–98.

[4] Nieminen A, Heinonen P, Neuvo Y. A new class of detail-preserving filters for image processing. IEEE Trans. on PAMI, 1987, PAMI-9(1): 74–90.

[5] Kundu A, Zhou J. Combination median filter. IEEE Trans. on IP, 1992, IP-1(3): 422–429.

[6] Dixon W J. Ratios involving extreme values. Ann. Math. Statistics, 1951, 26(1): 68–78.

COMBINATION MEDIAN FILTER BASED ON BAYES-DECISION

Song Huansheng Liang Dequn* Liu Chunyang* Wu Chengke

(Xidian University, Xi'an 710071)

(Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

Abstract To settle the contradiction of noise-filtering and image detail-preserving in image filtering, a combination median filter based on Bayes-decision is proposed. The main contributions are: (1) deriving the union conditional density function of a defined test vector; (2) giving an algorithm for estimating pre-probability; (3) introducing a new filter structure, which combining median and multistage median filters based on Bayes-decision.

Key words Image processing, Median filter, Bayes-decision, Order statistic

宋焕生： 男， 1964 年生，博士后，研究方向为非线性图象分析．

梁德群： 男， 1937 年生，教授，研究方向为图象处理与机器视觉．

刘春明： 男， 1962 年生，博士后，研究方向为图象编码．

吴成柯： 男， 1938 年生，教授，研究方向为图象分析．