第4卷 第4期
1982年7月

电子学通讯
JOURNAL OF ELECTRONICS

Vol. 4, No. 4
July, 1982

一般线性网络的混合分析法*

黄汝激
(北京钢铁学院)

提　　要

本文应用网络图论提出了圈-离集混合基矩阵的概念、混合基中基尔霍夫定律的矩阵表示和一般线性网络的混合基方程，进而建立了一般线性网络的圈电流-离集电压混合分析法. 这个方法把文献[4]关于无源和无互感网络的混合分析法推广到包括有源和有互感网络在内的一般的线性时不变集总参数网络的情况.

一、基本定义

线性网络的经典分析方法有：基尔霍夫的支路电流法，麦克斯韦的回路电流法和节点电压法. 后来，由于网络图论的发展[1-3,6,7]，从回路推广到圈，从节点推广到割集和离集；回路电流法被推广成圈电流法(即广义回路电流法)[3,7]，节点电压法被推广成割集电压法和离集电压法[1-3]. 文献[4]把回路电流法和割集电压法结合起来，提出了无源和无互感网络的 f 回路电流-f 割集电压混合分析法. 本文把它推广了，提出了包括有源和有互感网络在内的一般的线性时不变集总参数网络的圈电流-离集电压混合分析法. 在理论上，混合法是一般的分析方法，圈电流法和离集电压法(特别是回路电流法和割集电压法和节点电压法)都是混合法的特殊情况. 在实际上，当混合空间的维数 f 比圈空间的维数 m 和离集空间的维数 r 小时，混合法的方程个数比圈电流法和离集电压法的要少，从而解方程组的工作量较少，这是混合法的优点.

本文中采用的名词、定义和符号主要参考文献[1]和[7]. 普通的基本概念，像回路、f 回路、圈(cycle)、割集、f 割集和离集(seg)[即反圈(cocycle)]等，可参阅文献[1]和[7]. 这里仅介绍本文中要用到而目前尚未标准化的一些名词的定义.

设有一线性时不变集总参数网络(简称线性网络) N，它的图为 $G=(X, U)$，$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 为 G 的点集，$U=\{1, 2, \cdots, b\}$ 为 G 的弧集. 定义

回路向量——b 维行向量 $\mu_c=[\mu_{ci}]_{1\times b}=[\mu_{c1}\mu_{c2}\cdots\mu_{cb}]$，这里

$$\mu_{ci}=\begin{cases}+1, & \text{若弧 } i\subset \text{回路 } \mu_c, \text{ 且 } i \text{ 与 } \mu_c \text{ 同向;}\\ -1, & \text{若弧 } i\subset \text{回路 } \mu_c, \text{ 且 } i \text{ 与 } \mu_c \text{ 反向;}\\ 0, & \text{若弧 } i\not\subset \text{回路 } \mu_c.\end{cases}$$

圈向量——图 G 中一些两两无公共弧的回路组成的连通子图称为圈；圈中所有回路的回

* 1980年11月4日收到.

路向量之和称为圈向量，$\mu = [\mu_i]_{1\times b}$. 回路向量是圈向量的特殊情况.

圈空间（B 空间）V_B——图 G 的所有圈向量张成的实数域线性空间.

圈基 M——圈空间的基底，由一组 m 个线性独立的圈向量组成；m 是圈空间的维数.

圈基矩阵 B——圈基-支路关联矩阵，即由圈基的 m 个圈向量所组成的一个 $m\times b$ 阶矩阵 $B=[b_{ij}]_{m\times b}$.

割集向量——b 维行向量 $\omega_c = [\omega_{ci}]_{1\times b} = [\omega_{c1}\ \omega_{c2}\cdots\omega_{cb}]$，这里

$$\omega_{ci} = \begin{cases} +1, & \text{若弧 } i\subset \text{割集 } \omega_c, \text{ 且 } i \text{ 与 } \omega_c \text{ 同向;} \\ -1, & \text{若弧 } i\subset \text{割集 } \omega_c, \text{ 且 } i \text{ 与 } \omega_c \text{ 反向;} \\ 0, & \text{若弧 } i\not\subset \text{割集 } \omega_c \ . \end{cases}$$

离集向量——图 G 中一些两两无公共弧的割集组成的子图称为离集；离集中所有割集的割集向量之和称为离集向量，$\omega=[\omega_i]_{1\times b}$. 割集向量是离集向量的特殊情况.

离集空间（Q 空间）V_Q——图 G 的所有离集向量张成的实数域线性空间.

离集基 Ω——离集空间的基底，由一组 r 个线性独立的离集向量组成；r 是离集空间的维数.

离集基矩阵 Q——离集基-支路关联矩阵，即由离集基的 r 个离集向量所组成的一个 $r\times b$ 阶矩阵 $Q=[q_{ij}]_{r\times b}$.

本文为了使所述理论具有普遍性起见，采用圈电流和离集电压的概念，代替常用的回路电流和割集电压的概念，前二者是后二者的推广.

二、圈-离集混合基矩阵

设有一个一般线性网络 N，它的图 $G=(X, U)$. 把弧集 U 分成两个互不相交的子弧集 U_1 和 U_2，即 $U=U_1\cup U_2$，且 $U_1\cap U_2=0$. 设弧的标号顺序是先 U_1 后 U_2. 从图 G 构造两个子图 G_1 和 G_2. 图 G_1 是从图 G 缩减子弧集 U_2（即把 U_2 中每条弧缩小成一点）而得到的一个缩减图；图 G_2 是从图 G 移去子弧集 U_1（即把 U_1 中每条弧移去而留下顶点）所得到的一个部分图. 设图 G、G_1 和 G_2 的弧数各为 b、b_1 和 b_2，秩各为 r、r_1 和 r_2，朒（零度）各为 m、m_1 和 m_2.

从子图 G_1 和 G_2 分别选定一个圈基 M_1' 和 M_2' 以及离集基 Ω_1' 和 Ω_2'. 设对应的圈基矩阵为 B_1 和 B_2，离集基矩阵为 Q_1 和 Q_2，B_1、B_2、Q_1 和 Q_2 的阶数各为 $m_1\times b_1$、$m_2\times b_2$、$r_1\times b_1$ 和 $r_2\times b_2$.

当从缩减图 G_1 复原到图 G 时，圈基 M_1' 和 M_2' 变成图 G 中的圈集 M_1 和 M_2（G 中 M_2 与 G_2 中的 M_2' 相同）. 圈集 M_1 和 M_2 一起形成 G 中的一个圈基 M，对应的圈基矩阵为

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & B_{12} \\ B_{21} & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & B_{12} \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

式中 $B_{21}=0$，这是由于 G_2 中的圈就是 G 中的圈，它与子弧集 U_1 无关.

当从缩减图 G_1 复原到图 G 时，离集基 Ω_1' 和 Ω_2' 变成图 G 中的离集集合 Ω_1 和 Ω_2（G 中 Ω_1 与 G_1 中的 Ω_1' 相同）. Ω_1 和 Ω_2 一起形成 G 中的一个离集基 Ω，对应的离集基矩阵为

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ Q_{21} & Q_2 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

式中 $Q_{12}=0$，这是由于 G_1 中的离集就是 G 中的离集，它与子弧集 U_2 无关.

在图 G 中，圈集 M_1 和离集集合 Ω_2 一起形成一个混合基，称为圈-离集混合基，简称混合基，记为 $E=\{M_1, \Omega_2\}$. 由一个混合基 E 中的那 m_1 个圈向量和 r_2 个离集向量所组成的一个 $(m_1+r_2)\times b$ 阶矩阵，称为圈-离集混合基矩阵或混合基-支路关联矩阵，简称混合基矩阵，记为 F，即

$$F = \begin{bmatrix} B_1 & B_{12} \\ Q_{21} & Q_2 \end{bmatrix} = F_a + F_b, \tag{3}$$

式中

$$F_a = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} \text{——混合基自矩阵}, \tag{4}$$

$$F_b = \begin{bmatrix} 0 & B_{12} \\ Q_{21} & 0 \end{bmatrix} \text{——混合基互矩阵}. \tag{5}$$

以混合基 E 为基底的实数域线性空间称为圈-离集混合空间，记为 V_F. 它的维数为 $f=m_1+r_2$. 它是 b 维实向量空间 R^b 的一个子空间.

三、混合基中基尔霍夫定律的矩阵表示

引入下列记号：

$$I_b = \begin{bmatrix} I_{b1} \\ I_{b2} \end{bmatrix} \text{——图}\,G\,\text{的支路电流列向量}, \tag{6.a}$$

$$V_b = \begin{bmatrix} V_{b1} \\ V_{b2} \end{bmatrix} \text{——图}\,G\,\text{的支路电压列向量}, \tag{6.b}$$

$$I_\mu = \begin{bmatrix} I_{\mu1} \\ I_{\mu2} \end{bmatrix} \text{——圈基}\,M\,\text{的电流列向量}, \tag{6.c}$$

$$V_\omega = \begin{bmatrix} V_{\omega1} \\ V_{\omega2} \end{bmatrix} \text{——离集基}\,\Omega\,\text{的电压列向量}, \tag{6.d}$$

$$V_g = \begin{bmatrix} V_{g1} \\ V_{g2} \end{bmatrix} \text{——图}\,G\,\text{的支路独立电压源列向量}, \tag{6.e}$$

$$I_g = \begin{bmatrix} I_{g1} \\ I_{g2} \end{bmatrix} \text{——图}\,G\,\text{的支路独立电流源列向量}, \tag{6.f}$$

$$Z_b = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \text{——图}\,G\,\text{的支路阻抗矩阵}, \tag{6.g}$$

$$Y_b = Z_b^{-1} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \text{——图}\,G\,\text{的支路导纳矩阵}, \tag{6.h}$$

$$H_b = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} - Z_{12}Z_{22}^{-1}Z_{21} & Z_{12}Z_{22}^{-1} \\ Y_{21}Y_{11}^{-1} & Y_{22} - Y_{21}Y_{11}^{-1}Y_{12} \end{bmatrix}$$

$$\text{——图}\,G\,\text{的支路}\,h\,\text{参数矩阵}, \tag{6.i}$$

式中下标 1 和 2 分别表示图 G 中对应于子图 G_1 和 G_2 的分量. 在混合基中，分析时用 h 参数矩阵 H_b 比较方便. 在矩阵 H_b 中，子图 G_1 本身的参数矩阵 H_{11} 是阻抗性的，因此 G_1 称为 z 子图；子图 G_2 本身的参数矩阵 H_{22} 是导纳性的，因此 G_2 称为 y 子图.

根据基尔霍夫电流定律和基尔霍夫电压定律有

$$\begin{bmatrix} I_{b1} \\ I_{b2} \end{bmatrix} = I_b = B^T I_\mu = \begin{bmatrix} B_1^T I_{\mu1} \\ B_{12}^T I_{\mu1} + B_2^T I_{\mu2} \end{bmatrix}$$

和

$$\begin{bmatrix} V_{b1} \\ V_{b2} \end{bmatrix} = V_b = Q^T V_\omega = \begin{bmatrix} Q_1^T V_{\omega1} + Q_{21}^T V_{\omega2} \\ Q_2^T V_{\omega2} \end{bmatrix},$$

式中上标 T 表示矩阵的转置，因此推得

$$\begin{bmatrix} I_{b1} \\ V_{b2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1^T I_{\mu1} \\ Q_2^T V_{\omega2} \end{bmatrix} = F_a^T \begin{bmatrix} I_{\mu1} \\ V_{\omega2} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

另外，根据基尔霍夫电压定律和基尔霍夫电流定律有

$$BV_b = \begin{bmatrix} B_1 V_{b1} + B_{12} V_{b2} \\ B_2 V_{b2} \end{bmatrix} = 0, \quad B_1 V_{b1} = -B_{12} V_{b2};$$

$$QI_b = \begin{bmatrix} Q_1 I_{b1} \\ Q_{21} I_{b1} + Q_2 I_{b2} \end{bmatrix} = 0, \quad Q_2 I_{b2} = -Q_{21} I_{b1},$$

从而推得

$$F_a \begin{bmatrix} V_{b1} \\ I_{b2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B_{12} V_{b2} \\ -Q_{21} I_{b1} \end{bmatrix} = -F_b \begin{bmatrix} I_{b1} \\ V_{b2} \end{bmatrix}. \tag{8}$$

式 (7) 和 (8) 就是混合基中基尔霍夫定律的矩阵表达式.

另外，由于圈空间与离集空间的正交性，即

$$BQ^T = \begin{bmatrix} B_1 Q_1^T & B_1 Q_{21}^T + B_{12} Q_2^T \\ 0 & B_2 Q_2^T \end{bmatrix} = 0,$$

推得

$$B_1 Q_1^T = 0, \tag{9.a}$$

$$B_2 Q_2^T = 0, \tag{9.b}$$

$$B_1 Q_{21}^T + B_{12} Q_2^T = 0. \tag{9.c}$$

附带指出，本文中的电压和电流都是经拉氏变换后的象函数，阻抗和导纳都是复频率 s 的函数.

四、圈-离集混合基方程

根据文献 [5]，一般线性网络 N 的支路电流与支路电压之间的关系可表示成支路 y 参数方程如下：

$$I_b + I_g = Y_b (V_b + V_g). \tag{10}$$

这个方程实际上反映了欧姆定律. 应用 n 口网络的参数变换原理，可把式 (10) 变换成支路 h 参数方程：

$$\begin{bmatrix} V_{b1}+V_{g1} \\ I_{b2}+I_{g2} \end{bmatrix} = H_b \begin{bmatrix} I_{b1}+I_{g1} \\ V_{b2}+V_{g2} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

现在用 F_a 左乘式(11)的两边,并应用式(8)和(7),可推得

$$F_a\left(\begin{bmatrix} V_{g1} \\ I_{g2} \end{bmatrix} - H_b \begin{bmatrix} I_{g1} \\ V_{g2} \end{bmatrix}\right) = F_aH_b \begin{bmatrix} I_{b1} \\ V_{b2} \end{bmatrix} - F_a \begin{bmatrix} V_{b1} \\ I_{b2} \end{bmatrix}$$

$$= (F_aH_b + F_b)\begin{bmatrix} I_{b1} \\ V_{b2} \end{bmatrix} = (F_aH_b + F_b)F_a^T \begin{bmatrix} I_{\mu1} \\ V_{\omega2} \end{bmatrix},$$

从而得到圈-离集混合基方程如下:

$$H_F \begin{bmatrix} I_{\mu1} \\ V_{\omega2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{g\mu1} \\ I_{g\omega2} \end{bmatrix}, \tag{12}$$

式中

$\begin{bmatrix} I_{\mu1} \\ V_{\omega2} \end{bmatrix}$——混合基 E 的圈电流-离集电压列向量,

$$\begin{bmatrix} V_{g\mu1} \\ I_{g\omega2} \end{bmatrix} = F_a\left(\begin{bmatrix} V_{g1} \\ I_{g2} \end{bmatrix} - H_b \begin{bmatrix} I_{g1} \\ V_{g2} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} B_1(V_{g1} - H_{11}I_{g1} - H_{12}V_{g2}) \\ Q_2(I_{g2} - H_{21}I_{g1} - H_{22}V_{g2}) \end{bmatrix}$$

——混合基 E 的圈-离集等效独立源列向量,　(13.a)

$$H_F = (F_aH_b + F_b)F_a^T = \begin{bmatrix} B_1H_{11}B_1^T & (B_1H_{12} + B_{12})Q_2^T \\ (Q_2H_{21} + Q_{21})B_1^T & Q_2H_{22}Q_2^T \end{bmatrix}$$

——混合基 E 的圈-离集 h 参数矩阵.　(13.b)

混合基方程(12)表明:在圈-离集混合基中,每个圈满足基尔霍夫电压定律,每个离集满足基尔霍夫电流定律. 混合基方程组(12)中方程的个数等于混合空间的维数 $f = m_1 + r_2$. 如果 $f < m$ 和 $f < r$,则解混合基方程的工作量比解圈基方程和离集基方程的要少.

五、一般线性网络的混合分析法

一般线性网络的圈电流-离集电压混合分析法,简称混合法,是以混合基向量 $\begin{bmatrix} I_{\mu1} \\ V_{\omega2} \end{bmatrix}$ 为待求变量,列出混合基方程(12),然后解此方程,求出待求变量的一种分析方法. 具体步骤如下:

设有一线性网络 N,它的图 $G = (X, U)$. 把图 G 适当分成两个子图: z 子图 G_1 和 y 子图 G_2,要求使所得的混合空间维数 $f = m_1 + r_2$ 尽可能地小. 从 G_1 中选定一个圈基 M_1',从 G_2 中选定一个离集基 Ω_2'. 求出 M_1' 和 Ω_2' 在图 G 中的对应圈集合 M_1 和离集集合 Ω_2,构成图 G 的一个混合基 $E = \{M_1, \Omega_2\}$. 然后按式(3)—(5)写出混合基矩阵 F 及其分矩阵 F_a 和 F_b. 按式(11)和(6.i)写出图 G 的支路 h 参数矩阵 H_b. 按式(13.a)、(13.b)和(12)写出混合基 E 的圈-离集等效独立源列向量 $\begin{bmatrix} V_{g\mu1} \\ I_{g\omega2} \end{bmatrix}$、圈-离集 h 参数矩阵 H_F 和圈-离集混合基方程.

解所得混合基方程(12)，求得混合基E的圈电流-离集电压列向量为

$$\begin{bmatrix} I_{\mu 1} \\ V_{\omega 2} \end{bmatrix} = H_F^{-1} \begin{bmatrix} V_{g\mu 1} \\ I_{g\omega 2} \end{bmatrix}, \quad \text{若 } |H_F| \neq 0. \tag{14}$$

把它代入式(7)，并应用式(11)，求得网络N的支路电流-电压列向量为

$$\begin{bmatrix} I_{b1} \\ V_{b2} \end{bmatrix} = F_a^T \begin{bmatrix} I_{\mu 1} \\ V_{\omega 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1^T I_{\mu 1} \\ Q_2^T V_{\omega 2} \end{bmatrix} \tag{15.a}$$

和

$$\begin{bmatrix} V_{b1} \\ I_{b2} \end{bmatrix} = H_b \left(\begin{bmatrix} I_{b1} \\ V_{b2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{g1} \\ V_{g2} \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} V_{g1} \\ I_{g2} \end{bmatrix}. \tag{15.b}$$

网络N的支路元件的电流和电压列向量分别为

$$I_e = I_b + I_g \ \text{或} \ \begin{bmatrix} I_{e1} \\ I_{e2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{b1} + I_{g1} \\ I_{b2} + I_{g2} \end{bmatrix} \tag{16.a}$$

和

$$V_e = V_b + V_g \ \text{或} \ \begin{bmatrix} V_{e1} \\ V_{e2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{b1} + V_{g1} \\ V_{b2} + V_{g2} \end{bmatrix}. \tag{16.b}$$

上述混合分析法适用于包含有源和有互感网络在内的一般线性网络，因为支路h参数矩阵H_b中可以含有反映有源元件和互感元件特性的参数.

特殊情况　上述混合分析法还是一般的混合分析法. 圈电流法和离集电压法都是它的特殊情况. 下面介绍几种特殊情况:

(1) 若取$G_1 = G$, $G_2 = 0$(空图)，则$E = M_1 = M$, $F = F_a = B_1 = B$, $F_b = 0$, $H_b = H_{11} = Z_{11} = Z_b$, $H_F = BZ_bB^T$，混合法退化为圈电流法.

(2) 若取$G_2 = G$, $G_1 = 0$(空图)，则$E = \Omega_2 = \Omega$, $F = F_a = Q_2 = Q$, $F_b = 0$, $H_b = H_{22} = Y_{22} = Y_b$, $H_F = QY_bQ^T$，混合法退化为离集电压法.

(3) 若所取子图G_1与G_2之间没有耦合作用，即$H_{12} = H_{21} = 0$，则H_b和H_F简化成

$$H_b = \begin{bmatrix} Z_{11} & 0 \\ 0 & Y_{22} \end{bmatrix}, \tag{17.a}$$

$$H_F = \begin{bmatrix} B_1 Z_{11} B_1^T & B_{12} Q_2^T \\ Q_{21} B_1^T & Q_2 Y_{22} Q_2^T \end{bmatrix}. \tag{17.b}$$

(4) 若所取$M'_1 = M'_{f1}$为G_1中的一个f回路基，$\Omega'_2 = \Omega'_{f2}$为G_2中的一个f割集基；则$E = E_f = \{M_{f1}, \Omega_{f2}\}$为$G$中的一个$f$混合基，$F = F_f$为$G$中的一个$f$混合基矩阵，一般混合法简化成$f$混合法(基本混合法).

六、基本混合法(f混合法)

基本混合法的分析步骤　设有一个一般线性网络N，画出它的有向图G. 把图G分解成两个子图: z子图G_1和y子图G_2. 要求G_1与G_2之间的耦合尽可能少，而且所得混合空间V_F的维数$f = m_1 + r_2$尽可能地小，以便简化计算. 从G_1中选定一个树T_1，记下对应的f回路基M'_{f1}. 从G_2中选定一个树T_2，记下对应的f割集基Ω'_{f2}. T_1与T_2一

起构成图 G 中的一个树 T，记下 M'_{f1} 和 Ω'_{f2} 在 G 中对应的 f 回路集合 M_{f1} 和 f 割集集合 Ω_{f2}． M_{f1} 和 Ω_{f2} 组成图 G 的一个 f 混合基 $E_f=\{M_{f1},\Omega_{f2}\}$．把图 G 的支路按下面要求的顺序编号：首先是先 G_1 后 G_2，其次是先树支后连支．本节中所有下标 f 表示“基本”．

写出 f 混合基矩阵

$$F_f=F_{fa}+F_{fb},\tag{18.a}$$

$$F_{fa}=\begin{bmatrix}B_{f1}&0\\0&Q_{f2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B_{fT1}&1&0&0\\0&0&1&Q_{fL2}\end{bmatrix},\tag{18.b}$$

$$F_{fb}=\begin{bmatrix}0&B_{f12}\\Q_{f21}&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&B_{fT12}&0\\0&Q_{fL21}&0&0\end{bmatrix},\tag{18.c}$$

式中下标 f 表示 f 混合基;下标 1 和 2 分别表示对应于子图 G_1 和 G_2 的分量;下标 T 和 L 分别表示对应于树 T 和反树 L 的分量；分块 1 和 0 分别表示适当阶数的单位矩阵和零矩阵．

逐步写出或算出下列各矩阵：

支路 h 参数矩阵

$$H_b=\begin{bmatrix}H_{11}&H_{12}\\H_{21}&H_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Z_{11}-Z_{12}Z_{22}^{-1}Z_{21}&Z_{12}Z_{22}^{-1}\\Y_{21}Y_{11}^{-1}&Y_{22}-Y_{21}Y_{11}^{-1}Y_{12}\end{bmatrix},\tag{19.a}$$

$$H_b=\begin{bmatrix}Z_{11}&0\\0&Y_{22}\end{bmatrix}\ (\text{若 } Z_{12}=0,\ Y_{21}=0).\tag{19.b}$$

基 E_f 的回路-割集等效独立源列向量

$$\begin{bmatrix}V_{g\mu_{f1}}\\I_{g\omega_{f2}}\end{bmatrix}=F_{fa}\left(\begin{bmatrix}V_{g1}\\I_{g2}\end{bmatrix}-H_b\begin{bmatrix}I_{g1}\\V_{g2}\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}B_{f1}(V_{g1}-H_{11}I_{g1}-H_{12}V_{g2})\\Q_{f2}(I_{g2}-H_{21}I_{g1}-H_{22}V_{g2})\end{bmatrix},\tag{20.a}$$

$$\begin{bmatrix}V_{g\mu_{f1}}\\I_{g\omega_{f2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B_{f1}(V_{g1}-Z_{11}I_{g1})\\Q_{f2}(I_{g2}-Y_{22}V_{g2})\end{bmatrix}\ (\text{若 } Z_{12}=0,\ Y_{21}=0).\tag{20.b}$$

基 E_f 的回路-割集 h 参数矩阵

$$H_F=(F_{fa}H_b+F_{fb})F_{fa}^T=\begin{bmatrix}B_{f1}H_{11}B_{f1}^T&B_{f1}H_{12}Q_{f2}^T+B_{fT12}\\Q_{f2}H_{21}B_{f1}^T+Q_{fL21}&Q_{f2}H_{22}Q_{f2}^T\end{bmatrix},\tag{21.a}$$

$$H_F=\begin{bmatrix}B_{f1}Z_{11}B_{f1}^T&B_{fT12}\\Q_{fL21}&Q_{f2}Y_{22}Q_{f2}^T\end{bmatrix}\ (\text{若 } Z_{12}=0,\ Y_{21}=0).\tag{21.b}$$

f 混合基方程

$$H_F\begin{bmatrix}I_{\mu_{f1}}\\V_{\omega_{f2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}V_{g\mu_{f1}}\\I_{g\omega_{f2}}\end{bmatrix}.\tag{22}$$

基 E_f 的回路电流-割集电压列向量

$$\begin{bmatrix}I_{\mu_{f1}}\\V_{\omega_{f2}}\end{bmatrix}=H_F^{-1}\begin{bmatrix}V_{g\mu_{f1}}\\I_{g\omega_{f2}}\end{bmatrix},\ \text{若 } |H_F|\neq 0.\tag{23}$$

网络 N 的支路电流-电压列向量

$$\begin{bmatrix}I_{b1}\\V_{b2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_{T1}\\I_{L1}\\V_{T2}\\V_{L2}\end{bmatrix}=F_{fa}^T\begin{bmatrix}I_{\mu_{f1}}\\V_{\omega_{f2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B_{fT1}^TI_{\mu_{f1}}\\I_{\mu_{f1}}\\V_{\omega_{f2}}\\Q_{fL2}V_{\omega_{f2}}\end{bmatrix},\tag{24.a}$$

$$\begin{bmatrix} V_{b1} \\ I_{b2} \end{bmatrix} = H_b \left(\begin{bmatrix} I_{b1} \\ V_{b2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{g1} \\ V_{g2} \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} V_{g1} \\ I_{g2} \end{bmatrix}. \tag{24.b}$$

网络N的支路元件的电流和电压列向量

$$I_e = I_b + I_g, \tag{25.a}$$

$$V_e = V_b + V_g. \tag{25.b}$$

根据式(9.c)和(18.a)—(18.c), 可推得

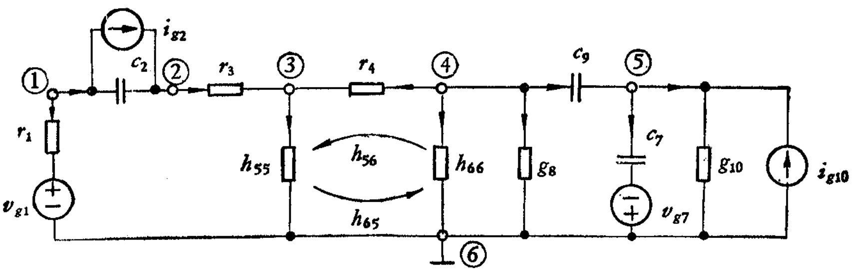
$$Q_{fL21} = -B_{fT12}^T. \tag{26}$$

把它代入式(21.b), 就得到文献[4]中的公式.

七、应用举例

例 有一线性网络N, 如图1所示. 现在用基本混合法求各支路电流和电压.

网络N的有向图G如图2所示. 可以把G分解成一个z子图G_1和一个y子图G_2, 如图3所示. 从G_1选一树$T_1=\{1, 2, 3\}$, 对应的f回路基$M'_{f1}=\{\mu'_{f1}, \mu'_{f2}\}$. 从$G_2$中选一树$T_2=\{6, 7\}$, 对应的$f$割集基$\Omega'_{f2}=\{\omega'_{f1}, \omega'_{f2}\}$. T_1和T_2组成图G的一个树$T=\{1, 2, 3; 6, 7\}$, 对应的f混合基$E_f=\{\mu_{f1}, \mu_{f2}; \omega_{f1}, \omega_{f2}\}$. 支路编号已经是: 先$G_1$后$G_2$, 先树支后连支.



$Z_1=r_1$, $Z_2=\dfrac{1}{SC_2}$, $Z_3=r_3$, $Z_4=r_4$; $y_7=SC_7$, $y_8=g_8$, $y_9=SC_9$, $y_{10}=g_{10}$; V_{g1}、V_{g7}和i_{g2}、i_{g10}是支路的源电压和源电流的拉氏变换

图1 有源线性网络N

Fig. 1 An active linear network N

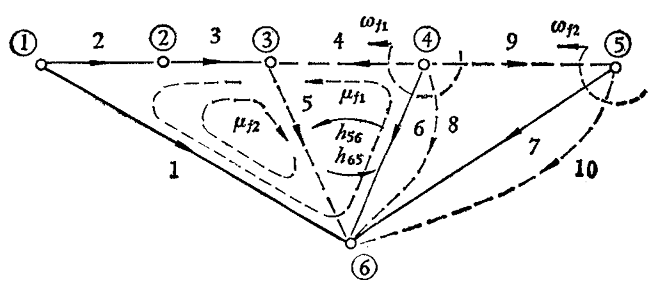


图2 网络N的有向图G

Fig. 2 The directed graph G of the network N

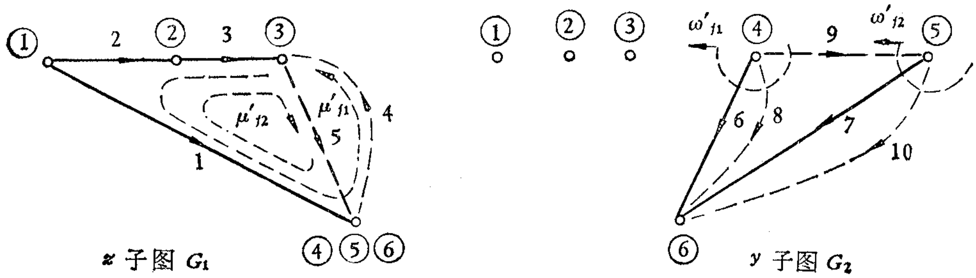


图 3　图G的 z 子图 G_1 和 y 子图 G_2

Fig. 3 The z subgraph G_1 and y subgraph G_2 of the graph G

按式(18.a)—(22)，逐步写出 f 混合基方程：

$$F_f=\begin{array}{c}\\ \mu_{f1}\\ \mu_{f2}\\ \omega_{f1}\\ \omega_{f2}\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc|ccccc}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccc|ccccc}1&-1&-1&1&0&-1&0&0&0&0\\ -1&1&1&0&1&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&1&0&1&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&-1&1\end{array}\right]\end{array}=F_{fa}+F_{fb},$$

$$F_{fa}=\begin{bmatrix}B_{f1}&0\\0&Q_{f2}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}1&-1&-1&1&0&0&0&0&0&0\\ -1&1&1&0&1&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&1&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&-1&1\end{array}\right],$$

$$F_{fb}=\begin{bmatrix}0&B_{f12}\\Q_{f21}&0\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{array}\right],$$

$$H_b=\begin{bmatrix}H_{11}&H_{12}\\H_{21}&H_{22}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}Z_1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&Z_2&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&Z_3&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&Z_4&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&h_{55}&h_{56}&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&h_{65}&h_{66}&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&y_7&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&y_8&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&y_9&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&y_{10}\end{array}\right],$$

$$\begin{bmatrix}V_{g1}\\I_{g2}\end{bmatrix}=[-V_{g1}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \vdots\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ i_{g10}]^T,$$

$$\begin{bmatrix} I_{g1} \\ V_{g2} \end{bmatrix} = [\,0 \quad -i_{g2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \;\vdots\; 0 \quad V_{g7} \quad 0 \quad 0 \quad 0\,]^T,$$

$$\begin{bmatrix} V_{g\mu f1} \\ I_{g\omega f2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{g\mu f1} \\ V_{g\mu f2} \\ \cdots\cdots \\ i_{g\omega f1} \\ i_{g\omega f2} \end{bmatrix} = F_{fa}\left(\begin{bmatrix} V_{g1} \\ I_{g2} \end{bmatrix} - H_b \begin{bmatrix} I_{g1} \\ V_{g2} \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} -V_{g1} - Z_2 i_{g2} \\ V_{g1} + Z_2 i_{g2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 \\ i_{g10} - y_7 V_{g7} \end{bmatrix},$$

$$H_F = \begin{bmatrix} H_{F11} & H_{F12} \\ H_{F21} & H_{F22} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 & -Z_1 - Z_2 - Z_3 & -1 & 0 \\ -Z_1 - Z_2 - Z_3 & Z_1 + Z_2 + Z_3 + h_{55} & h_{56} & 0 \\ \hline 1 & h_{65} & h_{66} + y_8 + y_9 & -y_9 \\ 0 & 0 & -y_9 & y_7 + y_9 + y_{10} \end{array}\right],$$

$$H_F \begin{bmatrix} i_{\mu f_1} \\ i_{\mu f_2} \\ V_{\omega f_1} \\ V_{\omega f_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V_{g1} - Z_2 i_{g2} \\ V_{g1} + Z_2 i_{g2} \\ 0 \\ i_{g10} - y_7 V_{g7} \end{bmatrix}.$$

解上述 f 混合基方程，求得

$$\begin{bmatrix} i_{\mu f_1} \\ i_{\mu f_2} \\ V_{\omega f_1} \\ V_{\omega f_2} \end{bmatrix} = H_F^{-1} \begin{bmatrix} -V_{g1} - Z_2 i_{g2} \\ V_{g1} + Z_2 i_{g2} \\ 0 \\ i_{g10} - y_7 V_{g7} \end{bmatrix}, \text{ 若 } |H_F| \neq 0.$$

因此，网络 N 的支路电流-电压列向量为

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \\ V_9 \\ V_{10} \end{bmatrix} = F_{fa}^T \begin{bmatrix} i_{\mu f_1} \\ i_{\mu f_2} \\ V_{\omega f_1} \\ V_{\omega f_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{\mu f_1} - i_{\mu f_2} \\ -i_{\mu f_1} + i_{\mu f_2} \\ -i_{\mu f_1} + i_{\mu f_2} \\ i_{\mu f_1} \\ i_{\mu f_2} \\ V_{\omega f_1} \\ V_{\omega f_2} \\ V_{\omega f_1} \\ V_{\omega f_1} - V_{\omega f_2} \\ V_{\omega f_2} \end{bmatrix},$$

$$
\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \\ i_9 \\ i_{10} \end{bmatrix}
= H_b \left(\begin{bmatrix} I_{b1} \\ V_{b2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{g1} \\ V_{g2} \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} V_{g1} \\ I_{g2} \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix} Z_1 i_1 + V_{g1} \\ Z_2 i_2 - Z_2 i_{g2} \\ Z_3 i_3 \\ Z_4 i_4 \\ h_{55} i_5 + h_{56} V_6 \\ h_{65} i_5 + h_{66} V_6 \\ y_7 V_7 + y_7 V_{g7} \\ y_8 V_8 \\ y_9 V_9 \\ y_{10} V_{10} - i_{g10} \end{bmatrix}.
$$

八、结 束 语

混合分析法的特点是，适当选择一个维数尽可能小的混合基，以混合基向量 $\begin{bmatrix} I_{\mu 1} \\ V_{\omega 2} \end{bmatrix}$ 为待求变量，列出混合基方程，然后求解．理论上，本文介绍的混合法是普遍方法，圈电流法和离集电压法都是它的特殊情况．它适用于任何线性时不变集总参数网络，包括有源和有互感网络．实际上，仅当混合空间的维数比圈空间和离集空间的维数小时，混合法的方程个数比圈电流法和离集电压法的少，从而解方程组的工作量较少，方显出混合法的优点．这种情况下，有应用价值的是其中比较简单的基本混合法．

一个图 G 中维数最小的混合空间(圈空间和离集空间是混合空间的特例)称为图 G 的最小混合空间．它的维数称为图 G 的自由度．如何求一个图的自由度、最小混合空间及对应的 z 子图 G_1 和 y 子图 G_2 呢？这是一个有待于进一步探讨的难题．如果解决了这个难题，就有可能使混合法得到推广应用．

参 考 文 献

[1] W. K. Chen, *Applied Graph Theory, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, London*, 1971, p. 36—76.
[2] S. P. Chan, *Introductory Topological Analysis of Electrical Networks, Chapter 2 and 4, Holl, Rinehart and Winston, Inc., New York*, 1969.
[3] J. B. Murdoch, *Network Theory, Chapter 4 and 5, McGraw-Hill, New York*, 1970.
[4] 王春华，图论与网络拓扑分析，计算机辅助设计，科学技术文献出版社重庆分社，1979年，第1—15页．
[5] 张惠廉、庄镇泉，电子线路的计算机辅助设计，上册，人民教育出版社，1979年，第86—121页．
[6] 邱关源，网络图论简介，人民教育出版社，1978．
[7] Claude Berge, *Graphs and Hypergraphs, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, London*, 1973, p. 3—17.

THE MIXED ANALYSIS METHOD OF GENERAL LINEAR NETWORKS

Huang Ru-ji

(Beijing Steel-Iron College, Department of Automatic Control)

In this paper, by applying the network graph theory, the concept of cycle-seg mixed basis matrix, the matrix representation of Kirchhoff's law in the mixed basis and the mixed basis equations of general linear networks are presented. Then the cycle current-seg voltage mixed analysis method of general linear networks is established. By this way, the mixed analysis method for passive networks without mutual inductances in reference [4] is extended to one for active networks with mutual inductances.