

电磁场“互能公式”在平面波展开理论中的应用*

赵 双 任

(西北电讯工程学院, 西安)

摘要 本文将互能公式应用到平面波展开理论中, 讨论了传输波与凋落波在正交性方面的区别, 得出了电流分布已知时场的平面波展开公式。本文还解决了一个由已知区域部分边界上的切向场决定区域内场的问题。

关键词 电磁场;互能公式;平面波

1. 引言

Fourier 变换的平面波展开理论在天线平面波近场测量^[2]、散射场计算等方面有着广泛的应用,目前的平面波展开理论^[3]没有讨论在电流分布已知时波展开系数的求法,没有对凋落波的一些性质作深刻的揭示,本文试图着手解决这些问题。

对无源区域,已知边界上的场可以定出区域的内场。但在一些特殊情况下,不需要知道完整边界上的场值,也可定出区域内场。利用本文对传输波和凋落波在正交性方面的研究结果就可解决这样的问题。本文是文献[1]的续篇,凡对文献[1]的引用将不列出。

2. 平面波型和正交性

平面波型为

$$\zeta_{\lambda}^{(i)} = \{E_{\lambda}^{(i)}, H_{\lambda}^{(i)}\} \quad (1)$$

式中, i 取值 +、-、 λ 表示三个角标 l , k_x , k_y 的总和,而

$$E_{\lambda}^{(i)} = E_{ik_x k_y}^{(i)} = \begin{cases} M_{k_x k_y}^{(i)}(\mathbf{r}), & l = 1 \\ N_{k_x k_y}^{(i)}(\mathbf{r}), & l = 2 \end{cases} \quad (2a)$$

$$H_{\lambda}^{(i)} = H_{ik_x k_y}^{(i)} = \begin{cases} \frac{j}{\eta} N_{k_x k_y}^{(i)}(\mathbf{r}), & l = 1 \\ \frac{j}{\eta} M_{k_x k_y}^{(i)}(\mathbf{r}), & l = 2 \end{cases} \quad (2b)$$

$$M_{k_x k_y}^{(i)}(\mathbf{r}) = \nabla \times (\hat{z}\phi_{k_x k_y}^{(i)}(\mathbf{r})) \quad (3a)$$

$$N_{k_x k_y}^{(i)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{k} \nabla \times \nabla \times (\hat{z}\phi_{k_x k_y}^{(i)}(\mathbf{r})) \quad (3b)$$

$$\phi_{k_x k_y}^{(i)}(\mathbf{r}) = e^{-i\mathbf{k}^{(i)} \cdot \mathbf{r}} \quad (4)$$

* 1987年2月21日收到,1987年7月31日修改定稿。

$$\mathbf{k}^{(\pm)} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} \pm \gamma \hat{z} \quad (5)$$

$$\gamma = \begin{cases} \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}, & k_x^2 + k_y^2 \leq k^2 \\ -j\sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k^2}, & k_x^2 + k_y^2 > k^2 \end{cases} \quad (6)$$

式中, $\eta = \sqrt{(\mu/\varepsilon)}$, \mathbf{r} 是直角坐标中点 (x, y, z) 的位置矢量, $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ 为直角坐标中单位基矢量, k_x, k_y 是波矢量 $\mathbf{k}^{(i)}$ 的 x 和 y 分量, $k = \|\mathbf{k}^{(i)}\|$, 为自由空间中的波数. 当 $k_x^2 + k_y^2 \leq k^2$ 时为传输波, 当 $k_x^2 + k_y^2 > k^2$ 时为凋落波. 当 i 取正值时表示沿 z 轴正向传输或凋落的波, 反之当 i 取负值时表示负向波.

平面波型满足正交关系. 对 $k_x^2 + k_y^2 \leq k^2$ 时

$$[\zeta_\lambda^{(\pm)}, \zeta_\lambda^{(\pm)}]_{r_0} = \pm R \delta_{\lambda\lambda'} \quad (7a)$$

$$[\zeta_\lambda^{(\pm)}, \zeta_\lambda^{(\mp)}]_{r_0} = 0 \quad (7b)$$

对 $k_x^2 + k_y^2 > k^2$ 时

$$[\zeta_\lambda^{(\pm)}, \zeta_\lambda^{(\pm)}]_{r_0} = 0 \quad (7c)$$

$$[\zeta_\lambda^{(\pm)}, \zeta_\lambda^{(\mp)}]_{r_0} = \pm R \delta_{\lambda\lambda'} \quad (7d)$$

式中, $R = 8\pi^2(k_x^2 + k_y^2)\gamma/\eta k$, $\delta_{\lambda\lambda'} = \delta_{i\lambda'}\delta(k_x - k'_x)\delta(k_y - k'_y)$, 内积定义在 $z = 0$ 的 Γ_0 平面上

$$[\zeta_1, \zeta_2]_{r_0} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2^* + \mathbf{E}_2^* \times \mathbf{H}_1) \cdot \hat{z} \quad (8)$$

(7) 式可合并为

$$[\zeta_\lambda^{(\pm)}, \zeta_\lambda^{(\mp)\dagger}]_{r_0} = \pm R \delta_{\lambda\lambda'} \quad (9a)$$

$$[\zeta_\lambda^{(\pm)}, \zeta_\lambda^{(\pm)\dagger}]_{r_0} = 0 \quad (9b)$$

式中, 角标 $\lambda = l(-k_x)(-k_y)$, $\zeta_\lambda^{(\pm)}$ 的上标 \dagger 为电磁场共轭号. (9) 式对传输波和凋落波都适用, (7) 适用于需要区别对待传输波和凋落波的情况.

3. 已知切向场时的平面波展开和已知电流分布时的平面波展开

(1) 切向场已知. 设场 ζ 的原 \mathbf{r} 全在 $z < 0$ 的区域内, 已测得 $z = 0$ 平面上的切向场, 求 $z > 0$ 区域的平面波展开. 在 $z > 0$ 区域内场 ζ 可展为

$$\zeta = \sum_\lambda A_\lambda \zeta_\lambda^{(+)} = \sum_{j=1}^L \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y A_{jk_x k_y} \zeta_{jk_x k_y}^{(+)} \quad (10)$$

式中

$$\sum_\lambda = \sum_{j=1}^L \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y.$$

应用正交关系(9)式得展开系数

$$A_\lambda = \frac{1}{R} [\zeta, \zeta_\lambda^{(-)\dagger}]_{r_0} = -\frac{1}{R} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy (\mathbf{E} \times \mathbf{H}_\lambda^{(-)} - \mathbf{E}_\lambda^{(-)} \times \mathbf{H}) \cdot \hat{z} \quad (11)$$

(2) 电流分布已知. 设已知 $z < 0$ 区域内的电流分布 \mathbf{J} , 求这一电流分布 \mathbf{J} 产生的场 ζ 在 $z > 0$ 区域内的平面波展开系数. 记 $z = z_1$ 的平面为 Γ_1 . 选择 z_1 使电流分布 \mathbf{J} 在 $z_1 < z < 0$ 的区域. 以原点 O 为球心 R 为半径作球面 Γ_R . $\Gamma_1, \Gamma_0, \Gamma_R$ 合成一闭曲面 $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_0 + \Gamma_R$. 记 Γ 包围的区域为 V , 曲面 $\Gamma_1, \Gamma_0, \Gamma_R$ 的外法线单位矢分别为 $\hat{n}_1,$

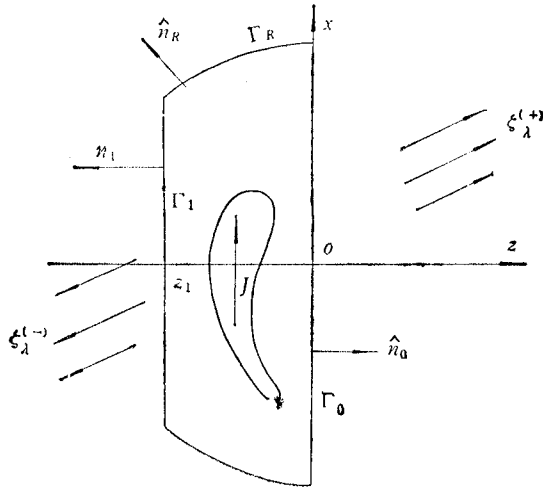


图1 曲面 \$\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_R\$ 和源 \$J\$ 的情况

\$\hat{n}_0, \hat{n}_R\$. 源 \$J\$ 与曲面情况见图 1.

由于内积 \$[\zeta, \zeta_\lambda^{(-)+}]\$ 在 \$\Gamma_R\$ 面上当 \$R \to \infty\$ 趋于零, 在 \$\Gamma_1\$ 上取零值(由正交关系 (9b) 式可得), 故有

$$A_\lambda = \frac{1}{R} [\zeta, \zeta_\lambda^{(-)+}]_{\Gamma_0} = \frac{1}{R} [\zeta, \zeta_\lambda^{(-)+}]_V = -\frac{1}{R} \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_\lambda^{(-)} dv \quad (12)$$

式中最后一个等式应用了互能公式或互易定理. 上式可改写为

$$A_{1k_x k_y} = -\frac{1}{R} \int_{z < 0} \mathbf{J} \cdot \mathbf{M}_{(-k_x, x - k_y)}^{(-)} dv \quad (13a)$$

$$A_{2k_x k_y} = -\frac{1}{R} \int_{z < 0} \mathbf{J} \cdot \mathbf{N}_{(-k_x, x - k_y)}^{(-)} dv \quad (13b)$$

4. 由区域部分边界上的场确定区域内场

设场 \$\zeta\$ 的源 \$\tau\$ 分布在 \$z < 0\$ 的区域内, 已测得 \$z > 0\$ 的半球 \$\Gamma_R\$ 上的场, 这里球面 \$\Gamma_R\$ 的半径 \$R\$ 足够大, 使 \$\Gamma_0\$ 面上 \$x^2 + y^2 > R\$ 处的场 \$\zeta\$ 几乎为零. \$\Gamma_0\$ 面与 \$z > 0\$ 的半球 \$\Gamma_R\$ 围成的区域记作 \$V_1\$, 求 \$V_1\$ 内任一点 \$\mathbf{x}_p\$ 的场. 源的分布, 曲面 \$\Gamma_0, \Gamma_R\$, 点 \$\mathbf{x}_p\$ 的情况见图 2.

设 \$\mathbf{x}_p\$ 点有源 \$\tau_2 = \{J_2, 0\}\$, \$J_2 = \hat{q}\delta(x - x_p)\$, 此处 \$\hat{q}\$ 是任一单位矢量, 由互能公式

$$[\zeta, \zeta_2]_\Gamma = (\zeta, \tau_2)_{V_1} = \mathbf{E}(\mathbf{x}_p) \cdot \hat{q} \quad (14)$$

式中, \$\Gamma\$ 为 \$\Gamma_0\$ 面与 \$z > 0\$ 的半球面 \$\Gamma_R\$ 构成的闭曲面, 即 \$\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_R - \Gamma'_0\$, 此处 \$\Gamma'_0\$ 是 \$xy\$ 平面 \$\Gamma_0\$ 上 \$x^2 + y^2 > R\$ 的区域. 上式还考虑了单位法矢 \$\hat{n}_0, \hat{n}_R\$ 指向 \$\Gamma\$ 内. 已设在 \$x^2 + y^2 > R\$ 的 \$\Gamma'_0\$ 面上场 \$\zeta\$ 几乎为零, 故上式中 \$\Gamma \approx \Gamma_0 + \Gamma_R\$.

电流分布 \$\tau = \{J, 0\}\$ 和 \$\tau_2\$ 在 \$\Gamma_0\$ 面上产生的场可分别展开为

$$\zeta = \zeta' + \zeta'' = \sum_{k_x^2 + k_y^2 \leq k^2} A_\lambda^{(+)} \zeta_\lambda^{(+)} + \sum_{k_x^2 + k_y^2 > k^2} A_\lambda^{(+)} \zeta_\lambda^{(+)} \quad (15a)$$

$$\zeta_2 = \zeta'_2 + \zeta''_2 = \sum_{k_x^2 + k_y^2 \leq k^2} B_\lambda^{(-)} \zeta_\lambda^{(-)} + \sum_{k_x^2 + k_y^2 > k^2} B_\lambda^{(-)} \zeta_\lambda^{(-)} \quad (15b)$$

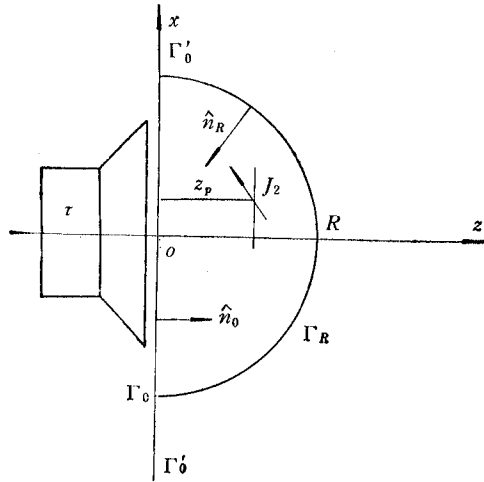


图2 曲面 Γ_0 , Γ_R 和点 x_p

两式中, ζ' 和 ζ_2' 代表传输波, ζ'' 和 ζ_2'' 代表凋落波, 分别由两式右边给出. 因传输波和凋落波有不同的 k_x, k_y , 故由正交关系(7)式知

$$[\zeta, \zeta_2]_{\Gamma_0} = [\zeta', \zeta_2']_{\Gamma_0} + [\zeta'', \zeta_2'']_{\Gamma_0} \tag{16}$$

由正交关系 (7b) 式知

$$[\zeta', \zeta_2']_{\Gamma_0} = 0 \tag{17}$$

如果选点 $x_p = (x_p, y_p, z_p)$ 使 $z_p \gg \lambda$, λ 为波长. 在 Γ_0 面有 $\zeta_2'' \propto e^{-\sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k^2} z_p} \rightarrow 0$ 这时有

$$[\zeta'', \zeta_2'']_{\Gamma_0} \approx 0 \tag{18}$$

应用(17)和(18)式, (14)式中 Γ 改为 Γ_R 了, 故有

$$\hat{q} \cdot \mathbf{E}(x_p) = [\zeta, \zeta_2]_{\Gamma_R} = \iint_{\substack{x^2 + y^2 = R^2 \\ z \geq 0}} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}_2^* + \mathbf{E}_2^* \times \mathbf{H})(-\hat{r}) dS \tag{19}$$

由此可利用 $z > 0$ 的半球 Γ_R 上测得的场计算点 x_p 的场, 上式在半径 R 足够大和 z_p 足够大时成立, 若这两个条件不满足, 计算误差将会增大.

如果采用 6 维并矢格林函数, 利用类似的证明, 场可表示为

$$\zeta(x_p) = [\zeta, \bar{\mathbf{g}}]_{\Gamma_R} \tag{20}$$

若利用惠更斯源场可表示为

$$\zeta(x_p) = -(\boldsymbol{\tau}, \bar{\mathbf{g}})_{\Gamma_R} \tag{21}$$

式中, $\boldsymbol{\tau} = \{\hat{n}_R \times \mathbf{H}, -\hat{n}_R \times \mathbf{E}\}$, 这里 $\hat{n}_R = -\hat{r}$, 即 \hat{n}_R 指向球心.

5. 结论

对于平面波展开, 往往需要区别对待传输波和凋落波. 这时采用正交关系(7)式和互能公式较方便. 利用文献[1]的一系列概念和符号给出问题的表达式是简单明了的.

参 考 文 献

[1] 赵双任, 电子科学学刊, 11(1989)1, 73-77.

- [2] D. T. Paris, *IEEE Trans. on AP*, **AP-26** (1978), 373—379.
- [3] A. W. Rudge, *The Handbook of Antenna Design*, Vol. 1, Peter Peregrinus Ltd., London, UK, §8·5·2, 1982.

THE APPLICATION OF “MUTUAL ENERGY FORMULA” IN EXPANSION OF RADIATION FIELD IN PLANE WAVES

Zhao Shuangren

(Institute of Northwest Telecommunication Engineering, Xi'an)

Abstract Mutual energy formula is used in the theory of expansion of radiation field in plane waves. The differences of transmissive wave and evanescent wave in orthogonality are discussed. The formula for expansion of plane waves with a known current distribution has been given. A problem to determine the inner field of an area in which the tangential fields of partial border have been known has been solved.

Key words Electromagnetic field; Mutual energy formula; Plane wave