第 13 卷 第 3 期　　电 子 科 学 学 刊　　Vol. 13, No. 3
1991 年 5 月　　JOURNAL OF ELECTRONICS　　May, 1991

一般 k 阶余因式的 k 超连接表达式和分解定理

黄 汝 激
(北京科技大学自动化系，北京)

摘要　本文应用有向超图理论提出了线性系统不定参数矩阵 Y 的一般 k 阶余因式 $Y_{(ij)}$ 的两个 k 超连接表达式，并根据它导出了 $Y_{(ij)}$ 的一个分解定理. 应用该定理容易对任意线性大系统进行多层撕裂和分析. 这是一种新的多层拓扑分析方法，它可以扩大一台计算机所能拓扑分析的系统规模.

关键词　有向超图理论；k 超连接；k 阶余因式；多层拓扑分析

一、引　　言

文献[1]提出了满秩方阵的 Coates 流图及其连接和 1 连接的概念. 文献[2]提出了 k 连接的概念和三阶以下特殊余因式 Y_{uv}、$Y_{rp,ss}$ 及 $Y_{pq,rr,ss}$ 的多连接表达式. 本文把 Coates 流图和 k 连接的概念推广到不定参数矩阵的情况，并应用有向超图理论[3]提出了 k 超连接的概念和一般 k 阶余因式 $Y_{(ij)}=Y_{(i_1j_1,\cdots,i_kj_k)}$ 的两个 k 超连接表达式.

文献[4]提出了行列式的流图分解公式((37)式). 文献[5]提出了行列式的有向超树分解公式(定理 2 和推论 4). 一般 k 阶余因式的拓扑分解公式是怎样的呢? 这是一个具有理论和实际意义的重要问题. 本文应用有向超图理论和上述 k 超连接表达式导出了一般 k 阶余因式 $Y_{(ij)}$ 的一个分解定理，其中给出了 $Y_{(ij)}$ 的一个分解公式(把 $Y_{(ij)}$ 展开成一个多项式,每项是两个较小规模多阶余因式的乘积)，解决了这个问题. 应用该定理容易对任意线性大系统进行多层撕裂和分析，这是一种新的多层拓扑分析方法. 它可以扩大一台计算机所能拓扑分析的系统规模. 本文发展了文献[2],并纠正了其中的错误.

二、一般 k 阶余因式的 k 超连接表达式

考虑一个线性系统 S，它的复频域参数矩阵 $Y'=[y_{ij}]_{m\times m}$ 是满秩的. 令 $n=m+1$，添上如下的第 n 行和第 n 列:

$$y_{nj}=-\sum_{i=1}^{m}y_{ij},\quad j=1,2,\cdots,m \tag{1a}$$

1989 年 11 月 23 日收到.

$$y_{in} = -\sum_{j=1}^{m} y_{ij}, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{1b}$$

使 Y' 变成一等余因式阵[6] $Y = [y_{ij}]_{n\times n}$，称为系统 S 的不定参数矩阵。它的伴随 Coates 图和混合图[6]分别记作 $G_c = (X, U_c)$ 和 $G = (X, U)$（对于电网络，它的不定导纳阵 Y 及其伴随 Coates 图 G_c 和混合图 G 可直接从电路图求得）。根据文献[7] Y 的一般 k 阶余因式 $Y_{(i,j)}$ 的定义如下：

$$Y_{(ij)} = Y_{(i_1j_1,\cdots,i_kj_k)} \triangleq e_{\binom{i}{\alpha}} e_{\binom{j}{\beta}} (-1)^{\sum_{f=1}^{k}(i_f+j_f)} |Y_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}| \tag{2}$$

式中 $i = i_1\cdots i_k$ 和 $j = j_1\cdots j_k$ 为顶点集 X 的两个 k 元排列，$\alpha = \alpha_1\cdots\alpha_k$ 和 $\beta = \beta_1\cdots\beta_k$ 为 i 和 j 的对应标准排列(即由小到大的顺序排列)，全排列 $p_n = 12\cdots n$，$\bar{\alpha} = p_n - \alpha = \bar{\alpha}_1\cdots\bar{\alpha}_{n-k}$ 和 $\bar{\beta} = p_n - \beta = \bar{\beta}_1\cdots\bar{\beta}_{n-k}$ 为 α 和 β 关于 p_n 的补标准排列，由 $\bar{\alpha}$ 和 $\bar{\beta}$ 置换得到的任意排列分别记作 $i^* = i_1^*\cdots i_{n-k}^*$ 和 $j^* = j_1^*\cdots j_{n-k}^*$，称作 i 和 j 关于 p_n 的补排列，$|Y_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}|$ 为从 Y 中去掉第 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 号行和第 $\beta_1,\cdots,\beta_k$ 号列后得到的余子式，$e_{\binom{i}{\alpha}}$ 和 $e_{\binom{j}{\beta}}$ 为置换 $\binom{i}{\alpha}$ 和 $\binom{j}{\beta}$ 的奇偶指标。

令 $j' = j_1',\cdots,j_k'$ 表示从排列 $j = j_1\cdots j_k$ 置换得到的某一排列。从 j 置换得到的所有排列的集合记作 P_j。图 G_c 的一个 **k 连接** $C_{ij'}^w = C_{i_1j_1',\cdots,i_kj_k'}^w$ 定义为 G_c 的这样一个子图，它包含 k 条彼此点不接触的有向通路 $i_1j_1',\cdots,i_kj_k'$ 和关联所有其余顶点的 l ($\geqslant 0$) 条彼此点不接触的有向回路(上标 w 表示编号，下标 i 和 j' 各为通路的始点和终点排列，若 $i_f = j_f' = r_h$，则有向通路 i_fj_f' 退化成孤立点 r_h)。若 $C_{ij'}^w$ 含有 x 条非退化有向通路 $p_1q_1',\cdots,p_xq_x'$ 和 y 个孤立点 $r_1,\cdots,r_y$，$x+y=k$，则记作

$$C_{ij'}^w = C_{pq',r}^w = C_{p_1q_1',\cdots,p_xq_x',r_1,\cdots,r_y}^w$$

式中 $p = p_1\cdots p_x$，$q' = q_1'\cdots q_x'$，$r = r_1\cdots r_y$ 各表示始点、终点和孤立点排列。始点的出度为 1，入度为 0；终点的出度为 0，入度为 1；孤立点的出、入度都为 0。因此，i 中每点入度为 0，i^* (或 $\bar{\alpha}$) 中每点入度为 1；j 中每点出度为 0，j^* (或 $\bar{\beta}$) 中每点出度为 1. k 连接的权 $C_{ij'}^w(y)$ 定义为 $C_{ij'}^w$ 的所有边权的乘积乘上因子$(-1)^l$，l 为 $C_{ij'}^w$ 的有向回路数。

令 $\{p\} = \{p_1,\cdots,p_x\}$ 表示排列 p 的对应集合。把 $\{p\}$、$\{q\}$、$\{r\}$ 看作 G_c 的可与别的系统 Coates 图互联的三个端点子集，其余端点[3](若有的话)构成的子集记作 $\{t\}$。G_c 的所有端点的集合记作 $E = \{p, q, r, t\}$，称为 G_c 的对应超边[3]。把 E 分成子集 p、q、r、t，称为 E 的一种划分。把超边 E 按照排列 p、q'、r (不管 t) 分解成 k 个子超边：$F_1(p_1, q_1'),\cdots, F_x(p_x, q_x')$，$F_{x+1}(r_1),\cdots, F_k(r_y)$，其中 $F_1,\cdots,F_x$ 为有向超通路[3]，$F_{x+1},\cdots, F_k$ 为孤立点(即退化超通路)，所得分解超图[3]称为 E 的一个 **k 超连接** (k-hyperconnection)，记作 $C_{pq',r}$ 或简记作 $C_{ij'}$，如图 1 所示。**k 超连接权** $C_{pq',r}(y)$ 定义为具有相同的始点、终点和孤立点排列 p、q' 和 r 的所有 k 连接的权 $C_{pq',r}^w(y)$ 之和，即

$$C_{ij'}(y) = C_{pq',r}(y) = \sum_{w} C_{pq',r}^w(y) \tag{3}$$

$j'=j$（即 $q'=q$）时的 k 超连接 $C_{ij}=C_{pq,r}$ 称为 E 的**基本 k 超连接.**

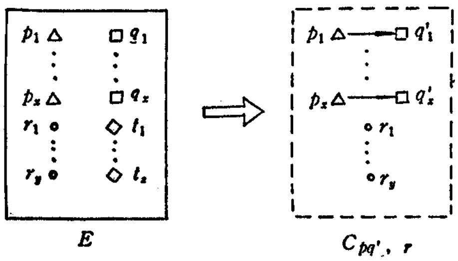


图 1　超边 E 及其 k 超连接 $C_{pq',r}$

定理 1（$Y_{(ij)}$ 的 k 超连接表达式）　设线性系统 S 的不定参数矩阵为 Y，Y 的伴随 Coates 图为 $G_c=(X, U_c)$，顶点集 $X=\{1, 2,\cdots n\}$，有向边集 $U_c=\{u_1,\cdots u_b\}$，G_c 的对应超边 $E=\{p, q, r, t\}$，排列 p 与 r 联成 k 元排列 i，q 与 r 联成 k 元排列 j，则 Y 的一般 k 阶余因式 $Y_{(ij)}$ 可通过 E 的 k 超连接 C_{ij} 和 $C_{i'j}$ 表达如下:

$$Y_{(ij)}=(-1)^{n-k}\sum_{j'\in P_j} e_{\binom{j}{j'}}C_{ij'}(y) \tag{4a}$$

$$=(-1)^{n-k}\sum_{i'\in P_i} e_{\binom{i}{i'}}C_{i'j}(y) \tag{4b}$$

（4a）和（4b）式中的求和是分别对于排列集 P_j 中的所有排列 j' 和 P_i 中的所有排列 i' 进行的，$e_{\binom{j}{j'}}$ 和 $e_{\binom{i}{i'}}$ 各是置换 $\begin{pmatrix} j \\ j' \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} i \\ i' \end{pmatrix}$ 的奇偶指标.

证　先定义 G_c 的出和入关联矩阵 A^+ 和 A^- 如下:

$A^+=[a^+_{ip}]_{n\times b}$: 若边 p 离开点 i，则 $a^+_{ip}=1$，否则 $a^+_{ip}=0$. $A^-=[a^-_{ip}]_{n\times b}$: 若边 p 指向点 i，则 $a^-_{ip}=1$，否则 $a^-_{ip}=0$. 显然，A^+ 和 A^- 的每一列至多含一个 1，其余元素为 0. 矩阵 A 中位于行号排列为 α 和列号排列为 γ 的那些行和列上的元素组成的子矩阵记作 $A(\alpha, \gamma)$. 若 $\gamma=p_n(\alpha=p_n)$，则简记作 $A(\alpha,)(A(, \gamma))$. G_c 的边权对角阵记作 $Y_e=\mathrm{diag}(y_1,\cdots, y_b)$，则据矩阵乘法和行列式的 Binet-Cauchy 定理有

$$Y_{\bar\alpha\bar\beta}=A^-(\bar\alpha,)Y_e[A^+(\bar\beta,)]^\tau \tag{5a}$$

$$|Y_{\bar\alpha\bar\beta}|=\sum_\gamma \det A^-(\bar\alpha, \gamma)\det Y_e(\gamma, \gamma)\det A^+(\bar\beta, \gamma)$$

$$=\sum_\gamma \det A^-(\bar\alpha, \gamma)\det A^+(\bar\beta, \gamma)G_\gamma(y) \tag{5b}$$

式中 τ 表示转置，$\bar\alpha=\bar\alpha_1\cdots\bar\alpha_{n-k}$，$\bar\beta=\bar\beta_1\cdots\bar\beta_{n-k}$，$\gamma=\gamma_1\cdots\gamma_{n-k}$，$G_\gamma$ 表示由 $n-k$ 条从 j^*_p 指向 i^*_p 的权为 $y_{i^*_p j^*_p}$ 的有向边 $u_{\gamma_p}, p=1,\cdots,n-k$，所组成的一个子图，$G_\gamma(y)=\prod_{\nu=1}^{n-k} y_{i^*_p j^*_p}$ 为 G_γ 的权. 因 A^- 和 A^+ 中每列至多含一个 1，$C^w_{ij'}$ 的始点补排列 $\bar\alpha$ 中每点入度为 1，终点补排列 $\bar\beta$ 中每点出度为 1，所以当且仅当 $G_\gamma=C^w_{ij'}(j'\in P_j)$ 时，$A^-(\bar\alpha, \gamma)$ 和 $A^+(\bar\beta, \gamma)$ 中每行、每列都恰好含一个 1，从而 $\det A^-(\bar\alpha, \gamma)$ 和 $\det A^+(\bar\beta, \gamma)$ 都不为 0，这时元素 $(i^*_1, \gamma_1)=\cdots=(i^*_{n-k}, \gamma_{n-k})=1, (j^*_1, \gamma_1)=\cdots=(j^*_{n-k}, \gamma_{n-k})=1$，其中行号排列和列号排列分别为 i^*、j^* 和 γ，它们的奇偶指标各为 e_{i^*}、e_{j^*} 和 e_γ，因此有

$$\det A^-(\bar\alpha, \gamma)=e_{i^*}e_\gamma, \quad \det A^+(\bar\beta, \gamma)=e_{j^*}e_\gamma \tag{6}$$

令 ii^* 表示由排列 i 和 i^* 联成的排列，i 和 i^* 的对应标准排列各为 α 和 $\bar\alpha$，根据排列奇偶指标理论有 $e_{ii^*}=e_ie_{i^*}e_{\alpha\bar\alpha}$. 两边乘以 $e_ie_{\alpha\bar\alpha}$，考虑到 $(e_i)^2=1$，$(e_{\alpha\bar\alpha})^2=1$，可得 $e_{i^*}=e_{ii^*}e_ie_{\alpha\bar\alpha}$. 同理可得 $e_{j^*}=e_{j'j^*}e_{j'}e_{\beta\bar\beta}$. 把它们代入(6)式，再把(6)式代入（5b

式，考虑到这时 $G_r(y)=(-1)^l C^w_{ii'}(y)(j'\in P_j)$，$e_r^2=1$，可得

$$|Y_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}|=\sum_{j'\in P_j}\sum_{w} e_{ii^*}e_{j'j^*}e_{\alpha\bar{\alpha}}e_{\beta\bar{\beta}}e_ie_{j'}(-1)^l C^w_{ii'}(y) \tag{7}$$

根据排列和置换的奇偶指标理论[8]有

$$e_{\alpha\bar{\alpha}}=(-1)^{\sum_{f=1}^{k}\alpha_f-\frac{1}{2}k(k+1)},\quad e_{\beta\bar{\beta}}=(-1)^{\sum_{f=1}^{k}\beta_f-\frac{1}{2}k(k+1)} \tag{8a}$$

$$e_{ii^*}e_{j'j^*}=e_{\binom{i\ i^*}{j'\ j^*}}=(-1)^{n-(k+l)} \tag{8b}$$

式中 $k+l$ 为置换 $\begin{pmatrix} i & i^* \\ j' & j^* \end{pmatrix}$ 中的独立循环置换数[8]，其中含有 $\begin{pmatrix} i \\ j' \end{pmatrix}$ 的 k 个独立循环置换对应于 $C^w_{ii'}$ 中的 k 个有向通路，其余 l 个独立循环置换对应于 $C^w_{ii'}$ 中的 l 个有向回路．把式(8a)和(8b)代入(7)式，再把(7)式代入(2)式，考虑到(3)式和 $e_\alpha=e_\beta=1$，$e_{\binom{i}{\alpha}}e_i=e_i^2=1$，$e_{\binom{j}{\beta}}e_{j'}=e_{\binom{j}{j'}}$，就可推得(4a)式．同理可证明(4b)式．

若 $ij=p_1q_1,\cdots,p_xq_x,r_1r_1,\cdots,r_yr_y$，$p=p_1\cdots p_x$，$q=q_1\cdots q_x$，$\{p\}\cap\{q\}=\phi$，则记 $Y_{(ij)}=Y_{(pq,rr)}$，$C_{ij}=C_{pq,r}$，$C_{ij'}=C_{pq',r}$，这时 $e_{\binom{j}{j'}}=e_{\binom{q}{q'}\binom{r}{r}}=e_{\binom{q}{q'}}$，$\sum\limits_{j'\in P_j}$ 应改为 $\sum\limits_{q'\in P_q}$，从而可得下面的推论．

推论 1　不定参数矩阵 Y 的一般 k 阶余因式 $Y_{(pq,rr)}$ 可通过 Y 的对应超边 $E=\{p,q,r,t\}$ 的 k 超连接 $C_{pq',r}$ 和 $C_{p'q,r}$ 表达如下：

$$Y_{(pq,rr)}=(-1)^{n-k}\sum_{q'\in P_q} e_{\binom{q}{q'}}C_{pq',r}(y) \tag{9a}$$

$$=(-1)^{n-k}\sum_{p'\in P_p} e_{\binom{p}{p'}}C_{p'q,r}(y) \tag{9b}$$

三、一般 k 阶余因式的分解定理

考虑一个线性系统 S，它的不定参数矩阵 $Y=[y_{uv}]_{n\times n}$，对应 Coates 图 $G_c=(X,U_c)$，$X=\{x_1,\cdots,x_n\}$，$U_c=\{u_1,\cdots,u_b\}$，欲求 k 阶余因式 $Y_{(ij)}=Y_{(pq,rr)}$，这时 G_c 的对应超边 $E=\{p,q,r,t\}$．若把系统 S 分解为两个子系统 S_1 和 S_2，对应地 G_c 分解为 G_{c1} 和 G_{c2}，对应超边记作 $E_1=\{p^1,q^1,r^1,t^1\}$ 和 $E_2=\{p^2,q^2,r^2,t^2\}$．设 G_{c1} 和 G_{c2} 的公共端点集(即撕裂点集)为 V，则 V 和超边集 $E=\{E_1,E_2\}$ 组成一个二超边超图[5] $H=(V,E)$．这时 E 的基本 k 超连接 $C_{pq,r}$ 分解为 E_1 的基本 k_1 超连接 $C^1_{p^1q^1,r^1}$ 和 E_2 的基本 k_2 超连接 $C^2_{p^2q^2,r^2}$，如图 2 所示．对于一定的 $C_{pq,r}$，如何确定 $C^1_{p^1q^1,r^1}$ 和 $C^2_{p^2q^2,r^2}$ 呢？关键在 V 中点的撕裂和划分．

令 $\{p_c\}=V\cap\{p\}$，$\{p_a\}=E_1\cap(\{p\}-\{p_c\})$，$\{p_b\}=E_2\cap(\{p\}-\{p_c\})$，这样就把 p 分解成 p_c、p_a 和 p_b．同样可把 q、r 和 t 分别分解成 q_c、q_a、q_b，r_c、r_a、r_b 和 t_c、t_a、t_b．令 $p_a\to p^1$ 表示 $\{p_a\}\subset\{p^1\}$．显然有 $p_a\to p^1$，$p_b\to p^2$，$q_a\to q^1$，$q_b\to q^2$，$r_a\to r^1$，$r_b\to r^2$，$t_a\to t^1$，$t_b\to t^2$．公共端点集 V 中的点如何撕裂和划分呢？这要根据 V 中各点在 $C_{pq,r}$ 内的出、入度来确定．因 r_c 内每点度数为 0，故 $r_c\to r^1$，$r_c\to r^2$．令 $S(p_c)$ 表

示 $\{p_c\}$ 的一个子集。因 p_c 内每点出度为 1，入度为 0，故若在 E_1 中选 $S(p_c) \to p^1$，$p_c - S(p_c) \to r^1$，则在 E_2 中 $S(p_c) \to r^2$，$p_c - S(p_c) \to p^2$。因 q_c 内每点入度为 1，出度为 0，故若在 E_1 中选 $S(q_c) \to q^1$，$q_c - S(q_c) \to r^1$，则在 E_2 中 $S(q_c) \to r^2$，$q_c - S(q_c) \to q^2$。设 E_1 到 E_2 的方向为正向。当 r_c、p_c 和 q_c 被撕裂并划分进 E_1 和 E_2 中后，可确定被撕裂的正向和反向通路数 d_1 和 d_2。令 $M = V - \{p_c\} - \{q_c\} - \{r_c\}$，称为新端点集，$m_1 = \mathrm{Card}\{p_c\}$，$m_2 = \mathrm{Card}\{q_c\}$，$m = \mathrm{Card}M$，$h_m$ 为 $(m - d_1 - d_2)/2$ 的整数部分。因 M 内每点的出、入度都为 1，故可从 M 中选 $h + d_1$ 个点送入 q^1 和 p^2，选 $h + d_2$ 个点送入 p^1 和 q^2，$h \in \{0, 1, \cdots, h_m\}$，前者中 d_1 个点用于连通被撕裂的 d_1 条正向超通路，后者中 d_2 个点用于连通被撕裂的 d_2 条反向超通路，其余 h 对点用于构成 h 个有向超回路。最后从 M 的剩下的 $f_m = m - d_1 - d_2 - 2h$ 个点中选 f 个点 $(f \leqslant f_m)$ 送入 r^1 和 t^2，其余点(如果有的话)送入 t^1 和 r^2。这样就形成了 E_1 和 E_2 的一对划分：$\{p^1, q^1, r^1, t^1\}$ 和 $\{p^2, q^2, r^2, t^2\}$，而且形成了 $C_{pq,r}$ 的一个基本分解，如图 2 所示。对于一定的 $S(p_c)$ 和 $S(q_c)$，M 的所有可能划分的集合 S_M 称为 M 的划分集。根据组合论，M 的划分数 $\mathrm{Card}\, S_M$ 如下：

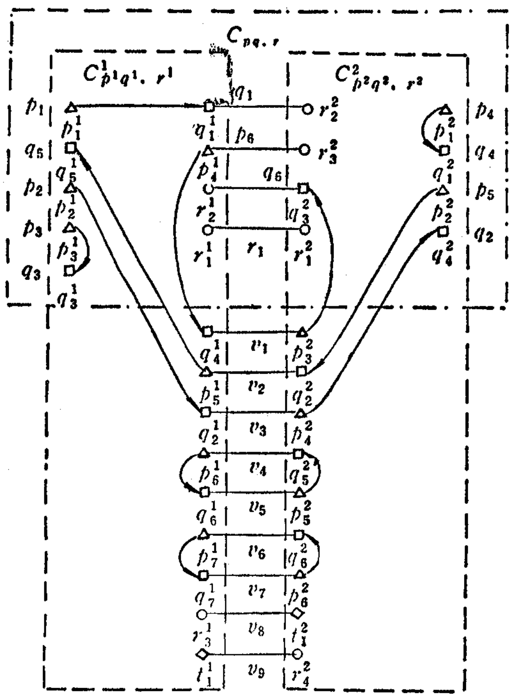


图 2 基本 k 超连接 $C_{pq,r}$ 的一个基本分解

$\{p_c\} = \{p_6\}$，$\{p_a\} = \{p_1, p_2, p_3\}$，$\{p_b\} = \{p_4, p_5\}$ $\{q_c\} = \{q_1, q_6\}$，$\{q_a\} = \{q_3, q_5\}$，$\{q_b\} = \{q_2, q_4\}$ $\{r_c\} = \{r_1\}$，$M = \{v_1, \cdots, v_9\}$，$V = \{p_c\} \cup \{q_c\} \cup \{r_c\} \cup M$ $k = 7$，$k_1 = 10$，$k_2 = 10$，$v = 13$，$d_1 = 2$，$d_2 = 1$，$h = 2$

$$\mathrm{Card}S_M = \sum_{h=0}^{h_m} \sum_{f=0}^{f_m} \frac{m!}{(h + d_1)!(h + d_2)!f!(m - d_1 - d_2 - 2h - f)!}$$

$$= \sum_{h=0}^{h_m} \frac{m!}{(h + d_1)!(h + d_2)!(m - d_1 - d_2 - 2h)!} 2^{(m - d_1 - d_2 - 2h)} \qquad (10)$$

定理 2 ($Y_{(pq,rr)}$ 的分解定理)　设不定参数矩阵 Y 的伴随 Coates 图为 G_c (或伴随混合图为 G)，欲分解的 k 阶余因式为 $Y_{(pq,rr)}$，对应超边 $E = \{p, q, r, t\}$，E 的基本 k 超连接为 $C_{pq,r}$。若把 G_c 分解为两个子图 G_{c1} 和 G_{c2} (或把 G 分解为 G_1 和 G_2)，它们的不定参数矩阵为 Y_1 和 Y_2，对应超边为 E_1 和 E_2，公共端点集 $V = \{p_c\} \cup \{q_c\} \cup \{r_c\} \cup M$，按照上述方法把 p、q、r、t 和 V 在 E_1 和 E_2 中进行划分，每种划分情况形成 E_1 和 E_2 的一对划分：$E_1 = \{p^1, q^1, r^1, t^1\}$ 和 $E_2 = \{p^2, q^2, r^2, t^2\}$，而且形成可选定 $C_{pq,r}$ 的一个基本分解：$C_{pq,r} \to \{C^1_{p^1q^1,r^1}, C^2_{p^2q^2,r^2}\}$，那么 $Y_{(pq,rr)}$ 可分解成

$$Y_{(pq,rr)}=\sum_{S(p_c)}\sum_{S(q_c)}\sum_{S_M}(-1)^h Y_{1(p^1q^1,r^1r^1)}Y_{2(p^2q^2,r^2r^2)} \tag{11}$$

式中 h 是 $C^{1}_{p^1q^1,r^1}$ 与 $C^{2}_{p^2q^2,r^2}$ 形成的有向超回路数，求和是对于 $\{p_c\}$ 的所有子集 $S\{p_c\}$、$\{q_c\}$ 的所有子集 $S(q_c)$ 和划分集 S_M 中的所有划分进行的。分解项数为

$$n_d=\sum_{S(p_c)}\sum_{S(q_c)}\sum_{h=0}^{h_m}\frac{m!}{(h+d_1)!(h+d_2)!(m-d_1-d_2-2h)!}2^{(m-d_1-d_2-2h)} \tag{12}$$

式中 $m=\mathrm{Card}\,M$，d_1 和 d_2 为被撕裂的正向和反向超通路数，h_m 为 $(m-d_1-d_2)/2$ 的整数部分。

证　因 $C_{pq,r}\to\{C^{1}_{p^1q^1,r^1},\ C^{2}_{p^2q^2,r^2}\}$，若 q 置换成 q' 使得 q^1 和 q^2 各置换成 $q^{1'}$ 和 $q^{2'}$，则 $C_{pq',r}\to\{C^{1}_{p^1q^{1'},r^1},\ C^{2}_{p^2q^{2'},r^2}\}$。根据 k 超连接权的定义有

$$C_{pq',r}(y)=\sum_{S(p_c)}\sum_{S(q_c)}\sum_{S_M}\sum_{\substack{q^{1'},q^{2'}\\ q'\text{不变}}}(-1)^{h'}C^{1}_{p^1q^{1'},r^1}(y)C^{2}_{p^2q^{2'},r^2}(y) \tag{13a}$$

$$=\sum_{S(p_c)}\sum_{S(q_c)}\sum_{S_M}(-1)^h\sum_{\substack{q^{1'},q^{2'}\\ q'\text{不变}}}e_{\binom{q^1}{q^{1'}}}e_{\binom{q^2}{q^{2'}}}C^{1}_{p^1q^{1'},r^1}(y)C^{2}_{p^2q^{2'},r^2}(y) \tag{13b}$$

(13a) 式中第四个$\sum$表示对于保持 q' 不变的所有 $q^{1'}\in P_{q^1}$ 和 $q^{2'}\in P_{q^2}$ 的对应项求和，h' 是 $C^{1}_{p^1q^{1'},r^1}$ 与 $C^{2}_{p^2q^{2'},r^2}$ 合成的有向超回路数。因合成后增加了 h' 个有向超回路，故应乘上因子 $(-1)^{h'}$。在 q' 不变的条件下，置换 $\binom{q^1}{q^{1'}}\binom{q^2}{q^{2'}}$ 中有关正、反向超通路的端点对换必是成对出现，不影响其奇偶性，有关超回路的端点置换奇偶性则与超回路数减少量 $h-h'$ 的奇偶性相同，从而 $(-1)^{h-h'}e_{\binom{q^1}{q^{1'}}}e_{\binom{q^2}{q^{2'}}}=1$，代入(13a)式，就推得(13b)式。

令 $v=\mathrm{Card}V$，因 V 中每点撕裂成两点，并使 k_1+k_2-k 增加1，故有

$$n_1+n_2=n+v,\quad k_1+k_2=k+v,\quad (-1)^{n-k}=(-1)^{n_1-k_1}(-1)^{n_2-k_2} \tag{14}$$

把(14)和(13b)式代入(9a)式，考虑到运算子

$$\sum_{q'\in P_n}e_{\binom{q}{q'}}\sum_{\substack{q^{1'},q^{2'}\\ q'\text{不变}}}e_{\binom{q^1}{q^{1'}}}e_{\binom{q^2}{q^{2'}}}\ \text{等价于}\ \sum_{q^{1'}\in P_{q^1}}e_{\binom{q^1}{q^{1'}}}\sum_{q^{2'}\in P_{q^2}}e_{\binom{q^2}{q^{2'}}} \tag{15}$$

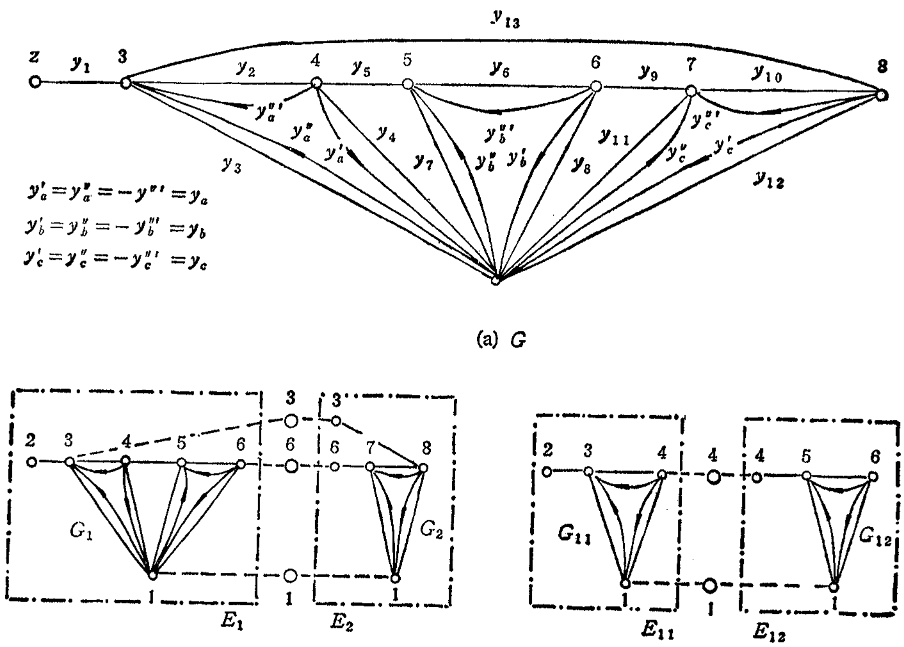
(因为式中第一个 $\sum$ 内 q' 的变化恰好取消了第二个 $\sum$ 内的“q' 不变”条件)，就可推得(11)式。根据(11)和(10)式容易推得(12)式。

应用分解公式(11)式时，$Y_{1(p^1q^1,r^1r^1)}$ 和 $Y_{2(p^2q^2,r^2r^2)}$ 的计算可以采用流图型公式(9a)或(9b)式，也可采用其他更有效的计算 k 阶余因式的方法，如文献[9]中的算法 DKTPCG，这是这种分解方法的一个优点。另一个优点是可以重复应用分解公式(11)式，形成多层分解分析方法(参看下面的应用举例)。

附带指出，根据定理 2 可以判定文献[2]中的多连接符号公式(19)式是错误的：首先，指数 k 的计算公式不正确；其次，因子Δ与 $\mathrm{sign}p_1\cdot\mathrm{sign}p_2$ 中的 Ord 因子重复了，应该去掉。

四、应 用 举 例

例　设有一个三运放低通滤波器电路(文献[5]中图 2(a))，它的不定导纳矩阵为 $\mathbf{Y}$，$\mathbf{Y}$ 的伴随混合图 G 如图 3(a) 所示．先把 G 分解成 G_1 和 G_2，再把 G_1 分解成 G_{11} 和 G_{12}，如图 3(b) 和 (c) 所示．试应用分解定理(定理 2) 求 $Y_{(11)}$ 和 $Y_{(38,11)}$。



(a) G

(b) $G \to \{G_1, G_2\}$　　(c) $G \to \{G_{11}, G_{12}\}$

图 3　混合图 G 及其二层分解（图(c)，中 G 为 G_1)

解　应用定理 2 于混合图 G 和 G_1 可求得：

$$Y_{(11)} = Y_{1(11)}Y_{2(11,33;66)} + Y_{1(11,33)}Y_{2(11,66)} + Y_{1(11,66)}Y_{2(11,33)} + Y_{1(11,33,66)}Y_{2(11)} + (-1)Y_{1(11,36)}Y_{2}(_{11,63}) + (-1)Y_{1(11,63)}Y_{2(11,36)}$$

$$Y_{(38,11)} = Y_{1(11,33)}Y_{2(38,11,66)} + Y_{1(11,33,66)}Y_{2(38,11)} + Y_{1(36,11)}Y_{2(68,11,33)}$$

$$Y_{1(11)} = Y_{11(11)}Y_{12(11,44)} + Y_{11(11,44)}Y_{12(11)},\quad Y_{1(11,33)} = Y_{11(11,33)}Y_{12(11,44)} + Y_{11(11,33,44)}Y_{12(11)}$$

$$Y_{1(11,66)} = Y_{11(11)}Y_{12(11,66,44)} + Y_{11(11,44)}Y_{12(11,66)}$$

$$Y_{1(11,33,66)} = Y_{11(11,33)}Y_{12(11,66,44)} + Y_{11(11,33,44)}Y_{12(11,66)}$$

$$Y_{1}(_{11,36}) = Y_{1(36,11)} = Y_{11(11,34)}Y_{12(11,46)},\quad Y_{1(11,63)} = Y_{11(11,43)}Y_{12(11,64)}$$

应用文献[9]中的算法 DKTPCG 于 G_{11}、G_{12} 和 G_2 可求得：

$$Y_{11(11)} = Y_{11(33)} = y_1[y_3(y_2 + y_4) + y_2(y_4 + y_a)],$$

$$Y_{12(11,44)} = (y_5 + y_7)(y_6 + y_8) + y_6(y_8 + y_b)$$

$$Y_{11(11,44)} = (y_2 + y_3)y_1,\qquad Y_{12(11)} = Y_{12(55)} = y_5[y_7(y_6 + y_8) + y_6(y_8 + y_b)]$$

$$Y_{11(11,33)} = y_1(y_2 + y_4),\qquad Y_{12(11,66,44)} = y_5 + y_6 + y_7$$

$$Y_{11(11,33,44)}=y_1,\qquad Y_{12(11,66)}=y_5(y_6+y_7)$$
$$Y_{11(11,34)}=y_1y_2,\qquad Y_{12(11,46)}=y_5y_6$$
$$Y_{11(11,43)}=(y_2-y_a)y_1,\qquad Y_{12(11,64)}=(y_6-y_b)y_5$$
$$Y_{2(11,33,66)}=(y_9+y_{11})(y_{10}+y_{12}+y_{13})+y_{10}(y_{12}+y_{13}+y_e)$$
$$Y_{2(11,66)}=(y_9+y_{11})(y_{10}+y_{12})y_{13}+y_{10}(y_{12}+y_e)y_{13}$$
$$Y_{2(11,33)}=y_{11}y_9(y_{10}+y_{12}+y_{13})+y_9y_{10}(y_{12}+y_{13}+y_e)$$
$$Y_{2(11)}=Y_{2(77)}=y_{11}y_9(y_{10}+y_{12})y_{13}+y_9y_{10}(y_{12}+y_e)y_{13}$$
$$Y_{2(11,63)}=y_9y_{10}y_{13},\quad Y_{2(11,36)}=y_{13}(y_{10}-y_e)y_9,\quad Y_{2(68,11,33)}=y_9y_{10}$$
$$Y_{2(38,11,66)}=y_{13}(y_9+y_{10}+y_{11}),\quad Y_{2(38,11)}=y_{13}(y_{10}+y_{11})y_9$$

上面 $Y_{(11)}$ 的计算结果化简后与文献[5]的应用举例中 $\det Y_n$ 的相同，这就验证了定理 2 的正确性。

参　考　文　献

[1] C. L. Coates, *IRE Trans. on CT*, CT-6(1959), 170—187.
[2] J. A. Starzyk, et al., *IEEE Trans. on CAS*, CAS-33(1986), 302—315.
[3] 黄汝激，电子科学学刊，9(1987)，244—255.
[4] 陆生勋，中国科学(A辑)，9(1986)，940—948.
[5] 黄汝激，电子学报，15(1987)1，1—9.
[6] W. K. Chen, Applied Graph Theory, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, (1976).
[7] 黄汝激，电子科学学刊，7(1985)，81—91.
[8] 黄汝激，北京钢铁学院学报，2(1982)，83—89.
[9] 黄汝激，电子学报 15(1987)3，8—13.

DECOMPOSITION THEOREM AND *k*-HYPERCONNECTION EXPRESSIONS FOR GENERAL *k*-ORDER COFACTORS

Huang Ruji

(Beijing University of Science and Technology, Beijing)

Abstract　Two k-hyperconnection expressions of a general k-order cofactor $Y_{(ij)}$ are presented for the indefinite parameter matrix Y of a linear system, and based on it, a decomposition theorem of $Y_{(ij)}$ is derived. By this theorem, the multi-level tearing and analysis can be carried out easily for any large linear system. This is a new multi-level topological analysis method. Using the method the scale of systems which can be topologically analysed by a computer will be increased.

Key words　Directed hypergraph theory; k-hyperconnection; k-order cofactor; Multi-level topological analysis