第 13 卷 第 2 期
1991 年 3 月

电子科学学刊
JOURNAL OF ELECTRONICS

Vol. 13, No. 2
Mar., 1991

线性无耗零状态网络的互易性和幺正性

周东方 周永华
(解放军信息工程学院,郑州) (机电部二十七研究所,驻马店)

摘要 线性无耗网络不一定同时具备互易性和幺正性,但在零状态条件下,线性无耗网络同时具有互易性和幺正性. 本文从互能定理出发,证明了标量媒质和双各向异性张量媒质的线性无耗零状态网络的互易性和幺正性.

关键词 线性无耗网络;零状态;互能定理;互易性和幺正性

1. 引言

有关微波网络理论的文献大都把"无耗"和"互易"作为两个独立的概念来加以讨论. 文献[1,3]较为深入地分析了"无耗"和"互易"两个重要的网络性质,并给出了仅局限于各向同性媒质的网络的互易性和幺正性的一种证明. 文献[2]则只对无耗问题进行了深入的论述. 有关系统地分析"无耗"与"互易"之间联系的论述并不多见. 本文运用互能定理[2,4]从本质上系统地证明了线性无耗双各向异性媒质(即一切线性无耗媒质)构成的零状态网络必然具有互易性和幺正性.

2. 线性无耗媒质的互能定理

零状态是指体积 V 内的电场、磁场、电流、磁流只由 V 外探测源产生,而 V 内的固有场源均为零的状态. 或者说器件、网络在无探测源的情况下,其内部任何空间不存在任何电磁场和源. 假设 $(\boldsymbol{E}^a,\boldsymbol{H}^a)$, $(\boldsymbol{E}^b,\boldsymbol{H}^b)$ 为由体积 V 外探测源在 V 内产生的两组同频率的场. $(\boldsymbol{E}^{a*},\boldsymbol{H}^{a*})$, $(\boldsymbol{E}^{b*},\boldsymbol{H}^{b*})$ 为其对应的共轭场. 则由两个广义的 Maxwell 旋度方程,经推导和整理,可得在线性零状态条件下的广义互易定理形式,即互能结构.

$$\nabla\cdot[(\boldsymbol{E}^a\times\boldsymbol{H}^{b*})+(\boldsymbol{E}^{b*}\times\boldsymbol{H}^a)]=j\omega[\boldsymbol{E}^{b*},\ \boldsymbol{H}^{b*}][\bar{\boldsymbol{D}}_{EH}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}^a\\ \boldsymbol{H}^a\end{bmatrix} \tag{1}$$

式中

$$\bar{\boldsymbol{D}}_{EH}=\begin{bmatrix}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^+-\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) & (\bar{\boldsymbol{\xi}}^+-\bar{\boldsymbol{\xi}})\\ (\bar{\boldsymbol{\xi}}^+-\bar{\boldsymbol{\xi}}) & (\bar{\boldsymbol{\mu}}^+-\bar{\boldsymbol{\mu}})\end{bmatrix} \tag{2}$$

(2)式中符号"+"表示厄米矩阵. $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$、$\bar{\boldsymbol{\xi}}$、$\bar{\boldsymbol{\xi}}$、$\bar{\boldsymbol{\mu}}$ 由媒质本构矩阵 $\bar{\boldsymbol{C}}_{EH}$ 给出[5]

$$\bar{\boldsymbol{C}}_{EH}=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} & \bar{\boldsymbol{\xi}}\\ \bar{\boldsymbol{\xi}} & \bar{\boldsymbol{\mu}}\end{bmatrix} \tag{3}$$

又据文献[5]无耗媒质的本构特点为

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^+=\bar{\boldsymbol{\varepsilon}},\ \bar{\boldsymbol{\mu}}^+=\bar{\boldsymbol{\mu}},\ \bar{\boldsymbol{\xi}}^+=\bar{\boldsymbol{\xi}} \tag{4}$$

于是由(1)、(4)两式可得线性无耗媒质,在零状态条件下的互能定理为

1989 年 9 月 22 日收到,1990 年 7 月 16 日修改定稿.

$$\nabla\cdot[cE^a\times E^{b*})+(E^{b*}\times H^a)]=0 \tag{5}$$

如不在零状态下，则不能得到.

3. 多端口线性无耗零状态网络的互易性和幺正性

设线性无耗零状态N端口网络的第p个端口处的电磁场为$(\boldsymbol{E}_p^a,\boldsymbol{H}_p^a),(\boldsymbol{E}_p^b,\boldsymbol{H}_p^b)$，其余面积上场强为零，则由(5)式得到

$$\sum_{p=1}^{N}\int_{S_p}(\boldsymbol{E}_p^a\times\boldsymbol{H}_p^{b*}+\boldsymbol{E}_p^{b*}\times\boldsymbol{H}_p^a)d\boldsymbol{S}=0 \tag{6}$$

若参考面S_p上只有单模传输，则由$\boldsymbol{E}_p^a$、$\boldsymbol{H}_p^a$可定义一组电压和电流V_p^a和I_p^a. 同理由$\boldsymbol{E}_p^b$、$\boldsymbol{H}_p^b$可定义另一组电压和电流V_p^b和I_p^b. 于是可导出：

$$\sum_{p=1}^{N}(V_p^aI_p^{b*}+V_p^{b*}I_p^a)=0 \tag{7}$$

(7)式即为线性无耗零状态网络的广义电压和电流的约束方程，并有以下定理成立.

定理　线性无耗零状态N端口网络必具有互易性和幺正性.

不妨令$N=2$($N=1$是显然的)，代入(7)式得到

$$V_1^aI_1^{b*}+V_2^aI_2^{b*}+V_1^{b*}I_1^a+V_2^{b*}I_2^a=0 \tag{8}$$

又因为

$$\begin{bmatrix}I_1^a\\I_2^a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Y_{11}&Y_{12}\\Y_{21}&Y_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1^a\\V_2^a\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}I_1^b\\I_2^b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Y_{11}&Y_{12}\\Y_{21}&Y_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1^b\\V_2^b\end{bmatrix} \tag{9}$$

将(9)式代入(8)式，整理后可得

$$\begin{aligned}&V_1^{b*}V_2^a(Y_{21}^*+Y_{12})+V_2^{b*}V_1^a(Y_{12}^*+Y_{21})\\&\quad+V_1^{b*}V_1^a(Y_{11}^*+Y_{11})+V_2^{b*}V_2^a(Y_{22}^*+Y_{22})=0\end{aligned} \tag{10}$$

解(10)式得

$$[Y_{ij}]^+=-[Y_{ij}],\quad i,\ j\in(1,2) \tag{11}$$

(11)式即为线性无耗零状态网络的特征方程. 设线性无耗零状态N端口网络满足以下特征方程和网络方程.

$$[Y_{ij}]^+=-[Y_{ij}],\ i,\ j\in(1,2,\cdots,N) \tag{12}$$

$$\begin{bmatrix}I_1\\\vdots\\I_N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Y_{11}\cdots Y_{1N}\\\vdots\qquad\vdots\\Y_{N1}\cdots Y_{NN}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\\vdots\\V_N\end{bmatrix} \tag{13}$$

又设$N+1$端口线性无耗零状态网络方程为

$$\begin{bmatrix}I_1\\\vdots\\I_N\\I_{N+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Y_{11}&\cdots&Y_{1N}&Y_{1(N+1)}\\\vdots&&\vdots&\vdots\\Y_{N1}&\cdots&Y_{NN}&Y_{N(N+1)}\\Y_{(N+1)1}&\cdots&Y_{N+1N}&Y_{(N+1)(N+1)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\\vdots\\V_N\\V_{N+1}\end{bmatrix} \tag{14}$$

故当对其第$N+1$端口短路时，即$V_{N+1}=0$，余下的N端口网络仍然是线性无耗零状态的. 所以根据(13)式有

$$[Y_{ij}]^+=-[Y_{ij}],\quad i,j\in(1,2,\cdots,N) \tag{15}$$

为方便计，我们把(14)式改写为

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_{N-1} \\ I_{N+1} \\ I_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & \cdots & Y_{1(N-1)} & Y_{1(N+1)} & Y_{1N} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_{(N-1)} & \cdots & Y_{(N-1)(N-1)} & Y_{(N-1)(N+1)} & Y_{(N-1)N} \\ Y_{(N+1)1} & \cdots & Y_{(N+1)(N-1)} & Y_{(N+1)(N+1)} & Y_{(N+1)N} \\ Y_{N1} & \cdots & Y_{N(N-1)} & Y_{N(N+1)} & Y_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_{N-1} \\ V_{N+1} \\ V_N \end{bmatrix} \tag{16}$$

当对$N+1$端口网络的第N端口短路时，即$V_N=0$，又得另一N端口网络方程为

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_{N-1} \\ I_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & \cdots & Y_{1(N-1)} & Y_{1(N+1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ Y_{(N-1)1} & \cdots & Y_{(N-1)(N-1)} & Y_{(N-1)(N+1)} \\ Y_{(N+1)1} & \cdots & Y_{(N+1)(N-1)} & Y_{(N+1)(N+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_{N-1} \\ V_{N+1} \end{bmatrix} \tag{17}$$

因为此时网络仍然是线性无耗零状态的，所以根据(12)式可以得到

$$Y^*_{(N+1)j} = -Y_{j(N+1)}, \quad j \in (1, N-1) \tag{18}$$

再对$N+1$端口线性无耗零状态网络的第1端口短路，即 $V_1=0$，可得另一N端口网络方程：

$$\begin{bmatrix} I_2 \\ \vdots \\ I_N \\ I_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{22} & \cdots & Y_{2N} & Y_{2(N+1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ Y_{N2} & \cdots & Y_{NN} & Y_{N(N+1)} \\ Y_{(N+1)1} & \cdots & Y_{(N+1)N} & Y_{(N+1)(N+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ \vdots \\ V_N \\ V_{N+1} \end{bmatrix} \tag{19}$$

上述N端口网络还是线性无耗零状态的，所以有

$$Y^*_{(N+1)j} = -Y_{j(N+1)}, \quad j \in (N, N+1) \tag{20}$$

总结(15)、(18)、(20)式可得$N+1$端口线性无耗零状态网络有

$$[Y_{ij}]^+ = -[Y_{ij}], \quad i, j \in (1, 2, \cdots, N+1) \tag{21}$$

根据(11)、(12)、(21)式，由数学归纳法可知，一切线性无耗零状态网络都有如下特征方程

$$[Y_{ij}]^+ = -[Y_{ij}], \; i, j \in (1, 2, \cdots, N) \tag{22}$$

(22)式的重要性可用 $[S]$参数进一步阐明．据文献[4]有

$$[S] = ([I] - [Y])([I] + [Y])^{-1} \tag{23}$$

$$([I] - [Y])([I] + [Y]) = ([I] + [Y])([I] - [Y]) \tag{24}$$

将(24)式前后乘以 $([I] + [Y])^{-1}$ 后，可以证得

$$[S] = [S]^T \tag{25}$$

从而由(22)、(23)、(25)式最后导出：

$$[S]^+[S] = [I] \tag{26}$$

由(25)(26)式可以清楚地看出，(22)式为线性无耗零状态网络的特征方程，即(22)式既包含了互易性亦反映了幺正性．

4. 结论

本文从无耗双各向异性媒质的宏观特性出发严格地证明了N端口线性无耗零状态网络具有互易性和幺正性两个基本性质．这个结论具有普遍的意义．

参　考　文　献

[1] 黄宏嘉，微波原理，卷 II，科学出版社，1963 年，第 356—360 页．

[2] J. A. 孔著,霍美瑜译,电磁波理论,人民教育出版社,1980 年,第 6 页.
[3] 吴万春,梁昌洪,微波网络及其应用,国防工业出版社,1980 年,第505—506 页.
[4] 赵双任,电子学报,1987 年,第 3 期,第 88—93 页.
[5] 王一平等,工程电动力学,西北电讯工程学院出版社,1985 年,第 18—21 页.

RECIPROCITY AND UNITARITY OF NON-LOSS LINEAR NETWORKS IN ZERO STATE

Zhou Dongfang
(Institute of Information Engineering, Zhengzhou)

Zhou Yonghua
(27th Institute, Zhumadian)

Abstract The reciprocity and the unitarity of non-loss linear networks in zero state are derived from the mutual energy theorem.

Key words Non-loss linear networks; Zero state; Mutual energy theorem; Reciprocity and unitarity