

# 金属椭圆柱面和双曲柱面上 天线的边值问题\*

毛 康 侯  
(北京遥感设备研究所)

## 提 要

本文给出了在金属椭圆柱面和双曲柱面上水平电振子和纵向开槽时远区场的一组新公式;并以纵槽为例,进行了理论计算和实验,证明两者是吻合的。本文有利于分析在特殊条件下天线辐射方向图,对于天线工程设计,在理论上具有指导意义。

## 一、引言

本文给出了在金属椭圆柱面和双曲柱面上水平电振子和纵向开槽时场强的普遍表达式;我们采用直接对偶解法<sup>[1-3]</sup>,即从麦克斯韦方程出发,直接求出在金属椭圆柱面和双曲柱面上的电流源和磁流源,使它们均满足边界条件和辐射条件,然后利用鞍点法求出远区场表达式。为了证明这一组新公式的正确性,首先我们令椭圆柱面和双曲柱面的共焦距等于零,就得到了金属圆楔形体的相同结果<sup>[3,4]</sup>。其次我们取特例计算了一组数据,并与实验作了对比,结果比较吻合。

## 二、理论公式

### 1. 水平电振子公式

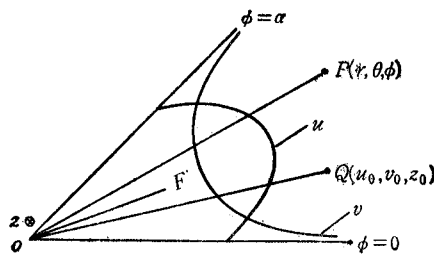


图 1

在图 1 中,  $P(r, \theta, \phi)$  为远区场观察点,  $Q(u_0, v_0, z_0)$  为电流源所在位置。  $OF$  为椭圆柱面和双曲柱面的半焦距,  $u$  为椭圆柱面的横断面,  $v$  为双曲柱面的横断面,  $\alpha$  是  $v$  的渐近线所形成的夹角。

设水平电振子平行于椭圆柱面和双曲柱面 (图 1), 则水平电振子远区场强公式为:

\* 1985 年 10 月 29 日收到, 1986 年 3 月 3 日修改定稿。

$$\begin{aligned}
 E_{\theta} \approx & \left\{ \frac{1}{2\pi} \frac{k^2}{\omega \varepsilon} \sum_{m=1}^{\infty} \Delta P_{z'} \sin \theta S_{0,\nu}(kd \sin \theta, \cos \phi') \right. \\
 & \times \frac{S_{0,\nu}(kd \sin \theta, \cos \phi)}{N_{0,\nu}} e^{jkz' \cos \theta} \\
 & \times \frac{\partial}{\partial u'} [W_1] \\
 & \times \left[ J_{0,\nu}(kd \sin \theta, \cosh u') - \frac{J_{0,\nu}(kd \sin \theta, \cosh u_0)}{H_{0,\nu}^{(2)}(kd \sin \theta, \cosh u_0)} \right. \\
 & \left. \times H_{0,\nu}^{(2)}(kd \sin \theta, \cosh u') \right] \sqrt{2\pi} e^{-ikr} r^{-1} e^{i\nu \frac{\pi}{2}} \left. \right\} \\
 & + O(r^{-2}), \tag{1}
 \end{aligned}$$

式中  $E_{\theta}$  为  $\theta$  方向的电场强度,  $\omega$  为角频率,  $k$  为波数,  $\varepsilon$  为介电常数,  $d$  为椭圆柱面和双曲柱面的共轭半焦距,  $S_{0,\nu}$  为马切角奇函数,  $J_{0,\nu}$  为马切-贝塞尔奇函数,  $H_{0,\nu}$  为马切-汉格尔奇函数.  $\Delta P_{z'}$  是水平电振子的分量, 由下式表示

$$\Delta P_{z'} = I_z dz', \quad (\text{线天线时}), \tag{2}$$

$$I_z = I_{z_0} \sin k(l - |z'|) / \sin kl. \tag{3}$$

当天线为任意长度时, (1) 式中的  $\Delta P_{z'} e^{jkz' \cos \theta}$  应由下式代替,

$$\begin{aligned}
 & \int_{-l}^l I_{z_0} \frac{\sin k(l - |z'|) e^{jkz' \cos \theta}}{\sin kl} dz' \\
 & = 2I_{z_0} \left\{ \frac{\cos [kl(\cos \theta)] - \cos kl}{k \sin^2 \theta \sin kl} \right\}. \tag{4}
 \end{aligned}$$

(1) 式中的  $N_{0,\nu}$  和  $\frac{\partial}{\partial u'} [W_1]$  由下列各式表示

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\alpha} S_{0,\nu}(kd \sin \theta, \cos \phi) S_{0,\nu'}(kd \sin \theta, \cos \phi) d\phi \\
 & = \begin{cases} N_{0,\nu}, & \text{当 } V = V' \left( V = \frac{m\pi}{\alpha}, V' = \frac{n\pi}{\alpha} \right); \\ 0, & \text{当 } V \neq V' (m \neq n). \end{cases} \tag{5}
 \end{aligned}$$

当  $d, \alpha$  一定时, 即可求出  $N_{0,\nu}$  之值.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial u'} [W_1] & = \frac{\partial}{\partial u'} [J_{0,\nu}(kd \sin \theta, \cosh u')] H_{0,\nu}^{(2)}(kd \sin \theta, \cosh u') \\
 & - J_{0,\nu}(kd \sin \theta, \cosh u') \frac{\partial}{\partial u'} [H_{0,\nu}^{(2)}(kd \sin \theta, \cosh u')]. \tag{6}
 \end{aligned}$$

当  $d, V$  一定时, 即可求出  $\frac{\partial}{\partial u'} [W_1]$  之值.

## 2. 纵向开槽天线公式

设纵向开槽天线在平行于椭圆柱面和双曲柱面上 (图 2), 亦可在椭圆柱面或双曲柱面上. 则纵向开槽天线远区场强公式为:

$$H_{\theta} \approx \left\{ \frac{1}{2\pi} \frac{k^2}{\omega \mu} \sum_{m=0}^{\infty} \Delta M_{z'} \sin \theta S_{e,\nu} [(kd \sin \theta), \cos \phi'] \right.$$

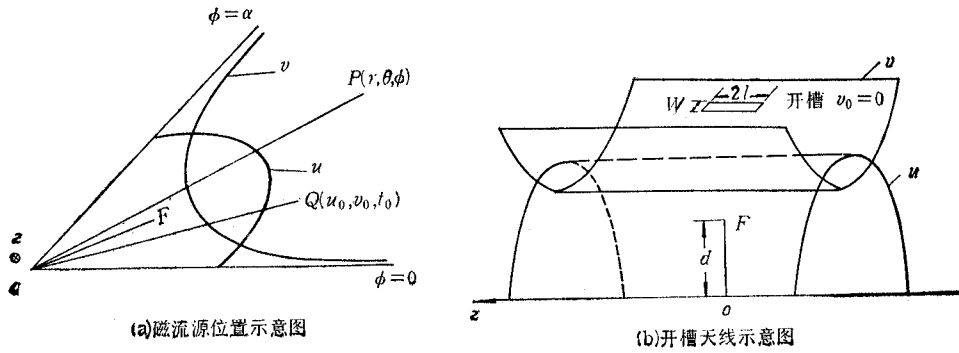


图 2

$$\begin{aligned}
 & \times \frac{S_{e,v}[(kd \sin \theta), \cos \phi]}{N_{e,v}} \cdot \frac{\partial}{\partial u'} [W_2] e^{ikz' \cos \theta} \\
 & \times \left[ J_{e,v}(kd \sin \theta, \cosh u') - \frac{J'_{e,v}(kd \sin \theta, \cosh u_0)}{H_{e,v}^{(2)}(kd \sin \theta, \cosh u_0)} \right. \\
 & \left. \times H_{e,v}^{(1)}(kd \sin \theta, \cosh u') \right] \sqrt{2\pi} e^{-ikr} r^{-1} e^{i\nu\pi/2} \} \\
 & + O(r^{-2}), \tag{7}
 \end{aligned}$$

式中

$$\Delta M_{z'} = V_z dS, \tag{8}$$

$$V_z = V_{z_0} \sin k(l - |z'|) / \sin kl, \tag{9}$$

$$dS = d(\cosh^2 u' - \cos^2 \phi')^{1/2} d\phi' dz'. \tag{10}$$

若考虑到纵向窄槽天线为任意长度时, 则  $\Delta M_{z'} e^{ikz' \cos \theta}$  应由下式来代替,

$$\begin{aligned}
 & \left[ \int_{-l}^l V_{z_0} \frac{\sin k(l - |z'|) e^{ikz' \cos \theta}}{\sin kl} dz' \right] d(\cosh^2 u' - \cos^2 \phi')^{1/2} \\
 & = 2V_{z_0} \left\{ \frac{\cos(kl \cos \theta) - \cos kl}{k \sin^2 \theta \sin kl} \right\} d(\cosh^2 u' - \cos^2 \phi')^{1/2}. \tag{11}
 \end{aligned}$$

(7)式中的  $N_{e,v}$  和  $\frac{\partial}{\partial u'} [W_2]$  由下列各式表示,

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\alpha S_{e,v}(kd \sin \theta, \cos \phi) S_{e,v}(kd \sin \theta, \cos \phi) d\phi \\
 & = \begin{cases} N_{e,v}, & \text{当 } V = V' (m = n), \\ 0, & \text{当 } V \neq V' (m \neq n). \end{cases} \tag{12}
 \end{aligned}$$

当  $d, \alpha$  一定时, 即可求出  $N_{e,v}$  之值.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial u'} [W_2] & = \frac{\partial}{\partial u'} [J_{e,v}(kd \sin \theta, \cosh u')] H_{e,v}^{(2)}(kd \sin \theta, \cosh u') \\
 & - J_{e,v}(kd \sin \theta, \cosh u') \frac{\partial}{\partial u'} [H_{e,v}^{(2)}(kd \sin \theta, \cosh u')]. \tag{13}
 \end{aligned}$$

当  $d, V$  一定时, 即可求出  $\frac{\partial}{\partial u'} [W_2]$ .

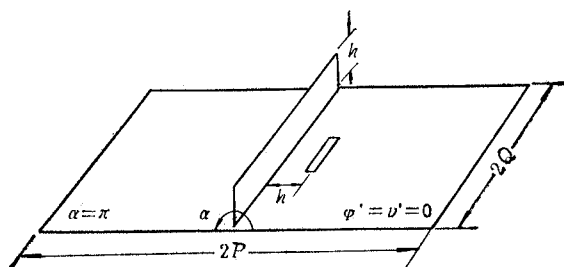
(7)–(13)式中,  $\Delta M_{z'}$  为纵向磁流源分量,  $S_{e,\nu}$  为马切角偶函数,  $J_{e,\nu}$  为马切-贝塞尔偶函数,  $H_{e,\nu}^{(2)}$  为马切-汉格尔偶函数,  $\mu$  为导磁系数。

当椭圆柱面和双曲柱面的共焦距  $2d \rightarrow 0$  时, 则  $E_\theta, H_\theta$  的公式退化为金属圆柱体和楔形体上水平电振子<sup>[4]</sup>和纵向开槽天线的公式<sup>[3,5]</sup>。

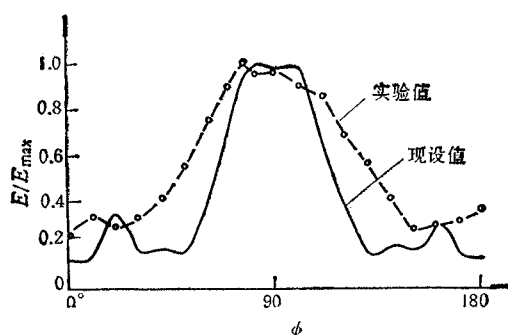
### 三、计算和测量

对金属椭圆柱面和双曲柱面上纵向半波开槽天线的特例(图 3(a)所示的结构), 从理论上计算了远区辐射场的方向图, 结果如图 3(b)所示。图中实线为理论计算值, 为比较起见, 图 3(b)中也给出了实验测量值, 如虚线所示。理论计算与实验测量均取下列条件:

$u_0 = 0, v_0 = 0$  (即  $\phi' = 0$ ),  $\theta = 90^\circ, u' = 0.88164 \text{ rad}, h = 0.25\lambda, \alpha = \pi \text{ rad}$ , 即  $\nu = m$ ; 并设开槽槽长  $2l = \lambda/2$ ; 唯一不同点在于计算时, 由于取  $\alpha = \pi$ , 故双曲柱面变为无限大平板; 而实验测量时只取有限尺寸  $|P| = 5\lambda, |Q| = 2.5\lambda$ ; 从理论曲线和实验曲线不难看出, 两者比较吻合, 而实验值略大于理论值, 其原因不仅由于有限尺寸所引起, 还有假设开槽天线上电压分布的影响等。



(a)椭圆柱与双曲柱面上开槽天线示意图



(b)椭圆柱与双曲柱面上开槽天线方向图( $\theta = \pi/2$ )

图 3

### 四、结论

(1) 首次给出了金属椭圆柱面和双曲柱面上水平电振子与纵向开槽天线的远区场强公式

(2) 当  $d \sin u_0 = 0$ , 但  $d \neq 0$  时, 可获得椭圆柱面和双曲柱面的一种特殊形式, 至

于纵向开槽的位置则取决于  $\nu_0$  (即  $\phi'$ ) 的值。在文中给出  $\alpha = \pi$ , 且  $\phi' = 0$ , 得到有限带片与无限大平面相互垂直的特殊复合形式。只要适当的选取  $u_0, \phi'$  以及不同  $\alpha$  值, 将得到不同的方向图。

(3) 当椭圆柱面和双曲柱面的共轭焦距  $2d \rightarrow 0$  时, 即退化为金属圆柱体和楔形体上水平振子和纵向开槽天线的结果。

(4) 由于在本文中用特殊函数较为复杂, 殷切希望有兴趣的读者能将公式编成通用计算机程序, 这样将可提供更有实用价值的软件。

### 参 考 文 献

- [1] 毛康侯, 宇航学报, 1980年, 第1期, 第28页.
- [2] Mao Kanghou, Boundary Value Problems in the Metallic Cylindrical Wedge Regions, U.R.S.J. North American Radio Science Meeting, Univesite Laval, Québec, Canada, June, 1980, p. 174.
- [3] 毛康侯, 天线边值问题中的对偶解法, 全国空间物理学术会议论文集, 1985年, 科学出版社, 第97页
- [4] 毛康侯, 宇航学报, 1981年, 第2期, 第25页.
- [5] J. R. Wait, Electromagnetic Radiation From Cylindrical Structures, London, Pergamon, 1959.

## BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF ANTENNAS IN METALLIC ELLIPTIC AND HYPERBOLIC CYLINDERS

Mao Kanghou

(Beijing Institute of Remote Sensing Equipment)

Some new formulas for calculating the far zone field of antenna of any length excited by horizontal electric and magnetic sources on the infinite metallic elliptic and hyperbolic cylinders are presented. As an example, the radiation patterns for a stub on the metallic plane are given and the obtained results are compared with the experimental ones, they are basically coincident.