

求符号网络函数的变形双图分解分析法

黄汝激

(北京科技大学自动化系 北京 100083)

摘要 引入了互补余因式对、正规双图和可行撕裂点集的概念。应用它们导出了一阶余因式 $C(Y)$ 的分解定理。把它与变形双图法相结合,提出了求符号网络函数的一个新的分解分析法——变形双图分解分析法。它的优点是所得符号网络函数表达式紧凑而且不含对消项,并且它的符号计算很简单。

关键词 变形双图,分解分析法,符号网络函数

1 引言

应用分解法求符号网络函数,在较小撕裂点数的情况下,可以减少计算量,提高计算效率,并使所得符号表达式更加紧凑。以前求符号网络函数的分解法有三类:(1) k 超树法^[1-3],它的符号计算很简单,但所得表达式含有对消项;(2)主子超图法^[4,5],它得到的表达式不含对消项,但产生主子超图比较麻烦;(3) k 超连接法^[6]和流图分解法^[7],它们的符号计算比较简单,但所得表达式含有较多对消项。本文目的是克服上述缺点,把不久前作者提出的变形双图法^[8]与一阶余因式分解定理结合起来,提出了求符号网络函数的一个新的分解分析法——变形双图分解分析法。它的优点是所得符号网络函数表达式紧凑而且不含对消项,并且它的符号计算很简单。

2 基本原理

考虑一个线性有源网络 N ,它的不定导纳矩阵为 Y ,Coates 图为 G_c ,双图^[8]为 $G=(G_i, G_o)$ 。欲求 N 的某一符号网络函数,例如从 N 的输入口 (i, k) 到输出口 (j, l) 的开路转移阻抗 $Z_{ij,kl}$,的符号表达式。根据文献[9]中(45a)式和文献[8]中定理 2 有

$$Z_{ij,kl} = \frac{Y_{(ij,kl)}}{Y_{(ll)}} = \frac{(-1)^r C(Y^{ij,kl})}{C(Y)} \quad (1)$$

式中 $Y_{(ll)} = C(Y)$ 是 Y 的一阶余因式,即 G 的图行列式; $Y_{(ij,kl)}$ 是 Y 的二阶余因式; $C(Y^{ij,kl})$ 是变形矩阵^[8] $Y^{ij,kl}$ 的一阶余因式,即变形双图^[8] $G^{ij,kl}$ 的图行列式;若 $i=j$ 则 $r=0$,若 $i \neq j$ 则 $r=1$ 。若 N 的规模较小,可直接应用文献[8]的变形双图法,

1992.06.03 收到,1992.12.04 定稿

黄汝激 男,1930年生,教授,研究专业是电路、系统与电磁场理论、网络图论与超网络超图理论。

从 G 和 $G^{ij,kl}$ 求得 $C(Y)$ 和 $C(Y^{ij,kl})$.

若 N 的规模较大而且 Y 是稀疏的, 为了便于处理和减少计算量, 最好把 N 通过顶点撕裂分解成两个较小的网络 N_1 和 N_2 , 对应地, Y 分解成 Y_1 和 Y_2 , G_c 分解成 G_{c1} 和 G_{c2} , G 分解成 G_1 和 G_2 , $Y^{ij,kl}$ 分解成 $Y_1^{ij,kl}$ 和 $Y_2^{ij,kl}$, $G^{ij,kl}$ 分解成 $G_1^{ij,kl}$ 和 $G_2^{ij,kl}$. 这样分解后如何求 $C(Y)$ 和 $C(Y^{ij,kl})$ 呢? 下面将逐步解决这个问题.

定义 1 超边 E_1 和 E_2 的互补划分对和互补划分对集 设 G_c 分解成 G_{c1} 和 G_{c2} , 它们的公共端点集(即撕裂点集)为 $V = \{v_0, v_1, \dots, v_m\}$, 则根据文献 [1, 10], G_{c1} 和 G_{c2} 的伴随超边分别为 $E_1 = \{v_0, \dots, v_m\}$ 和 $E_2 = \{v_0, \dots, v_m\}$, 顶点集 V 和超边集 $E = \{E_1, E_2\}$ 组成一个二超边超图 $H = (V, E)$. 从 V 中任选一点, 例如 v_0 , 作为参考点, 把 v_0 送入点集 r^1 和 r^2 . 令 $M = V - \{v_0\} = \{v_1, \dots, v_m\}$, $h_m = m/2$ 的整数部分, $h \in \{0, 1, \dots, h_m\}$, $l = m - 2h$, $f \in \{0, 1, \dots, l\}$. 从 M 中选出 h 个点组成点集 $p = \{p_1, \dots, p_h\}$, 并送入点集 p^1 和 q^2 ; 再选出 h 个点组成点集 $q = \{q_1, \dots, q_h\}$, 并送入点集 q^1 和 p^2 ; 然后选出 f 个点, 记作 r_1, \dots, r_f , 送入点集 r^1 和 r^2 ; 剩下的 $l - f$ 个点, 记作 s_1, \dots, s_{l-f} , 送入点集 r^2 和 r^1 . 把 r^1 和 r^2 简记作 r 和 s , 则 $p^1 = q^2 = p = \{p_1, \dots, p_h\}$, $q^1 = p^2 = q = \{q_1, \dots, q_h\}$, $r^1 = r = \{v_0, r_1, \dots, r_f\}$, $r^2 = s = \{v_0, s_1, \dots, s_{l-f}\}$, $r^1 = \{s_1, \dots, s_{l-f}\}$, $r^2 = \{r_1, \dots, r_f\}$. 它们形成了 E_1 和 E_2 的一对划分 $P = [E_1(p^1, q^1, r^1, r^2), E_2(p^2, q^2, r^2, r^1)]$, 称为 E_1 和 E_2 的互补划分对. E_1 和 E_2 的所有互补划分对的集合称为 E_1 和 E_2 的互补划分对集, 记作 $S(E_1, E_2) = \{P\}$. 根据组合论可导出 E_1 和 E_2 的互补划分对总数为

$$|S(E_1, E_2)| = \sum_{h=0}^{h_m} \sum_{f=0}^l \frac{m!}{(h_1)^2 f_1 (l-f)_1} = \sum_{h=0}^{h_m} \frac{m!}{(h_1)^2 (m-2h)_1} 2^{m-2h}. \quad (2)$$

定义 2 矩阵 Y_1 和 Y_2 的互补余因式对和互补余因式对集 对应于超边 E_1 和 E_2 的每对互补划分 $P = [E_1(p^1, q^1, r^1, r^2), E_2(p^2, q^2, r^2, r^1)] = [E_1(p, q, r, r^1), E_2(q, p, s, r^2)]$, 有矩阵 Y_1 和 Y_2 的一对余因式 $P_c = [Y_{1(rr, pq)}, Y_{2(rs, qp)}]$, 称为 Y_1 和 Y_2 关于撕裂点集 V 的互补余因式对, 式中 $rr = r^1 r^1 = v_0 v_0, r_1 r_1, \dots, r_f r_f$; $pq = p^1 q^1 = p_1 q_1, \dots, p_h q_h$; $ss = r^2 r^2 = v_0 v_0, s_1 s_1, \dots, s_{l-f} s_{l-f}$; $qp = p^2 q^2 = q_1 p_1, \dots, q_h p_h$. $Y_{1(rr, pq)}$ 的阶数 $k_1 = h + f + 1$, $Y_{2(rs, qp)}$ 的阶数 $k_2 = h + (l - f) + 1$, $k_1 + k_2 = m + 2 = |V| + 1$. Y_1 和 Y_2 关于 V 的所有互补余因式对的集合称为 Y_1 和 Y_2 关于 V 的互补余因式对集, 记作 $S(Y_1, Y_2) = \{P_c\}$. 显然, $|S(Y_1, Y_2)| = |S(E_1, E_2)|$.

定义 3 正规双图 若双图 $G = (G_i, G_e)$ 中 G_i 的行点与 G_e 的列点之间存在一一对应, 而且对应顶点的标号相同; G_i 的电流边与 G_e 的电压边之间也存在一一对应, 而且对应边的权相同, 则称 G 为正规的, 否则称为非正规的.

定义 4 可行撕裂点集 若双图 G 是正规的, 而且把点集 V 中每点撕裂为两点时能使 G 分解成两个正规的子双图 G_1 和 G_2 , 则称撕裂点集 V 为可行的, 否则称为不可行的. 显然, 要想应用变形双图法分析 G_1 和 G_2 , G_1 和 G_2 必须是正规的, 即 V 必须是可行的.

定理 1 ($C(Y)$ 的分解定理) 设不定导纳矩阵 Y 的伴随双图为 $G = (G_i, G_e)$, $V = \{v_0, v_1, \dots, v_m\}$ 为 G 的可行撕裂点集, 通过 V 中顶点的撕裂, G 分解成两个正规子双

图 G_1 和 G_2 , 对应地 Y 分解成 Y_1 和 Y_2 , Y_1 和 Y_2 的互补余因式对集为 $S(Y_1, Y_2) = \{P_c\} = \{[Y_{1(rr, pq)}, Y_{2(ss, qp)}]\}$, 则 Y 的一阶余因式(即 G 的图行列式) $C(Y) = Y_{(v_0, v_0)}$ 可分解如下:

$$C(Y) = \sum_{P_c \in S(Y_1, Y_2)} (-1)^k Y_{1(rr, pq)} Y_{2(ss, qp)} \quad (3)$$

$$= \sum_{P_c \in S(Y_1, Y_2)} (-1)^k C(Y_1^{rr, pq}) C(Y_2^{ss, qp}). \quad (4)$$

式中 $rr = v_0 v_0, r_1 r_1, \dots, r_f r_f$; $pq = p_1 q_1, \dots, p_h q_h$; $ss = v_0 v_0, s_1 s_1, \dots, s_{l-f} s_{l-f}$; $qp = q_1 p_1, \dots, q_h p_h$; $Y_{1(rr, pq)}$ 和 $Y_{2(ss, qp)}$ 是 Y_1 和 Y_2 的 $k_1 = h + f + 1$ 和 $k_2 = h + (l - f) + 1$ 阶互补余因式, $k_1 + k_2 = |V| + 1$; $C(Y_1^{rr, pq})$ 和 $C(Y_2^{ss, qp})$ 是 Y_1 和 Y_2 的变形矩阵 $Y_1^{rr, pq}$ 和 $Y_2^{ss, qp}$ 的一阶余因式(即 G_1 和 G_2 的变形双图 $G_1^{rr, pq}$ 和 $G_2^{ss, qp}$ 的图行列式); 求和是对所有互补余因式对 $P_c \in S(Y_1, Y_2)$ 进行的.

证明 应用文献[6]中定理 2 的(11)式于一阶余因式 $Y_{(v_0, v_0)}$ 可导出(3)式. 根据文献[8]中定理 2 的(3)式有 $Y_{1(rr, pq)} = (-1)^{k_1-1} C(Y_1^{rr, pq})$ 和 $Y_{2(ss, qp)} = (-1)^{k_2-1} C(Y_2^{ss, qp})$, 代入(3)式, 就可推得(4)式.

3 变形双图分解分析法

根据定理 1 和文献[8]中的变形双图法可得求符号网络函数 $Z_{ij, kl}$ 的变形双图分解分析法的步骤如下:

(1) 在网络 N 中标明节点号、元件参数号和支路电压、电流参考方向(所有非压控流源要预先化成压控流源), 按照文献[11]作出网络 N 的伴随双图 $G = (G_i, G_v)$, 根据 $Z_{ij, kl}$ 的下标 ij, kl 按照文献[8]中定义 1 作出 G 的变形双图 $G^{ij, kl}$. G 和 $G^{ij, kl}$ 的对应不定导纳矩阵分别记作 Y 和 $Y^{ij, kl}$.

(2) 选 G 的一个可行撕裂点集 V ($|V|$ 尽可能小些), 把 G 分解成两个正规子双图 G_1 和 G_2 , 它们的伴随不定导纳矩阵分别记作 Y_1 和 Y_2 . 按照定义 1 和定义 2 求出 Y_1 和 Y_2 关于 V 的互补余因式对集 $S(Y_1, Y_2) = \{[Y_{1(rr, pq)}, Y_{2(ss, qp)}]\}$.

(3) 应用定理 1 中(4)式分解一阶余因式 $C(Y)$.

(4) 对于 $S(Y_1, Y_2)$ 中每个互补余因式对 $P_c = [Y_{1(rr, pq)}, Y_{2(ss, qp)}]$, 应用文献[8]中变形双图法, 从对应的一对变形双图 $G_1^{rr, pq}$ 和 $G_2^{ss, qp}$ 求出它们的图行列式 $C(Y_1^{rr, pq})$ 和 $C(Y_2^{ss, qp})$ 的符号展开式, 代入(4)式, 求得 $C(Y)$ 的符号展开式.

(5) 对于 $G^{ij, kl}$ 和 $Y^{ij, kl}$ 重复步骤(2)–(4), 求得 $C(Y^{ij, kl})$ 的符号展开式.

(6) 将 $C(Y)$ 和 $C(Y^{ij, kl})$ 的符号展开式代入(1)式, 即得 $Z_{ij, kl}$ 的符号表达式.

注意: (1) 如果在步骤 4 中不用变形双图法, 而再次调用变形双图分解分析法, 则可构成变形双图多层分解分析法. (2) 如果把(1)式用别的网络(或系统)函数的拓扑公式代替, 本法稍加修改, 也可用于求别的网络(或系统)函数的符号表达式. (3) 如果要求部分符号网络函数, 可把网络 N 分解成符号参数子网络 N_1 , 和数值参数子网络 N_2 , 并在步骤 4 中用变形双图法求 $C(Y_1^{rr, pq})$ 的符号展开式, 用通常的数值方法计算 $C(Y_2^{ss, qp})$ 的值.

(4) 变形双图分解分析法适宜用于可行撕裂点集基数 $|V|$ 较小 (即不定导纳矩阵 r 为稀疏的) 的网络。若 $|V|$ 较大, 则分解项数 $|S(Y_1, Y_2)|$ 太大, 可能不如直接应用变形双图法。(5) 如何把本法推广到含非压控流源的一般线性网络? 这是一个值得进一步研究的问题。

4 应用举例

例 有一线性有源网络 N 如图 1(a) 所示, 求 N 的开路转移阻抗 $Z_{14,25}$ 的全符号表达式。

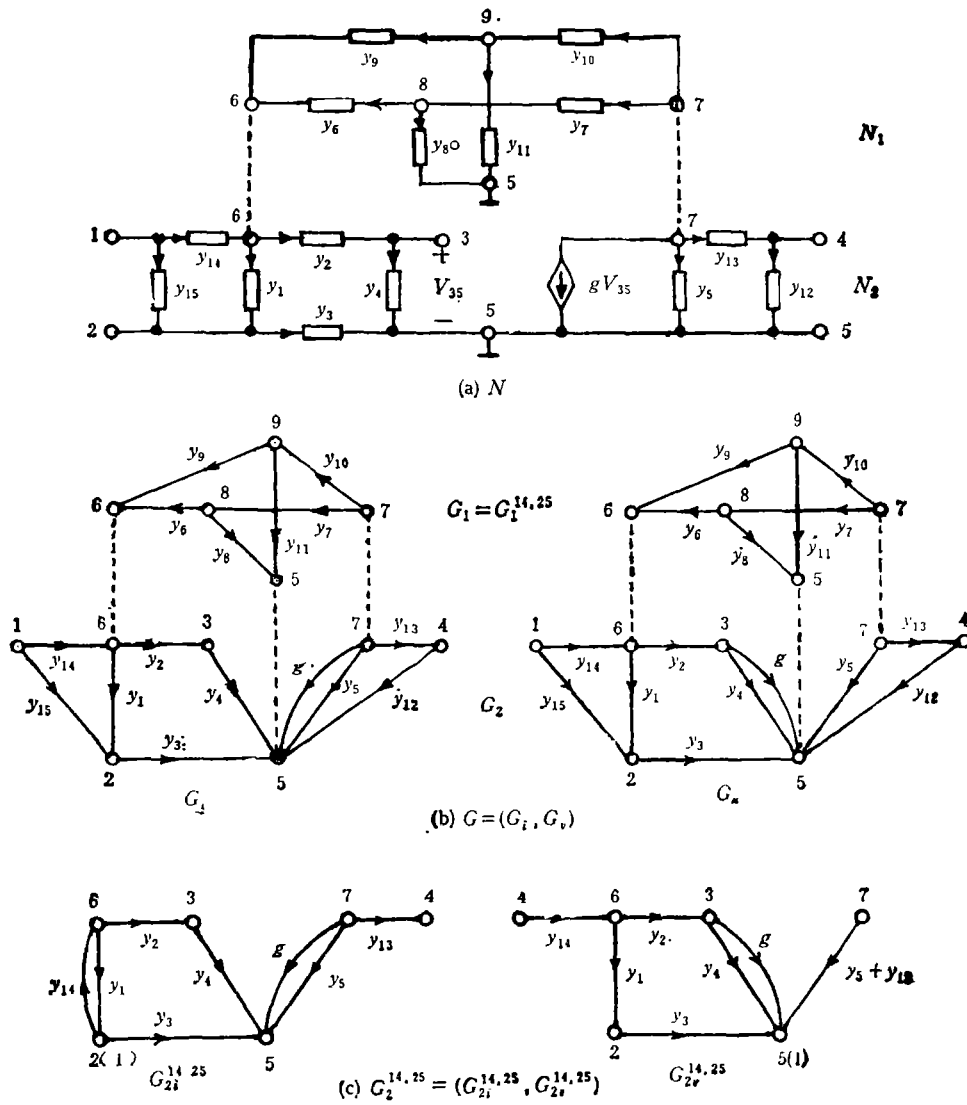


图 1 有源网络 N 及其伴随双图 G 和变形子双图 $G_1^{14,25}$

解 在网络 N 中标明节点号、元件导纳号和支路电压、电流参考方向如图 1(a) 所示。按照文献[11]作出 N 的伴随双图 $G = (G_i, G_p)$ 如图 1(b) 所示。按照文献[8]中定义 1 作出 G 的变形双图 $G^{14,25} = G_1^{14,25} \cup G_2^{14,25}$, 其中 $G_1^{14,25} = G_1$, $G_2^{14,25}$ 如图 1(c) 所示。对于 G 和 $G^{14,25}$ 说来, $V = \{5, 6, 7\}$ 都是可行撕裂点集。它使 G 分解成 G_1 和 G_2 如图 1(b) 所示, 使 $G^{14,25}$ 分解成 $G_1^{14,25}$ 和 $G_2^{14,25}$ 。令 $G_m = G^{14,25}$, $Y_m = Y^{14,25}$ 。按照定义 1 和定义 2 求出互补余因式对集 $S(Y_1, Y_2)$ 和 $S(Y_{m1}, S_{m2}) = S(Y_1, Y_{m2})$ 后, 应用定理 1 中(4)式可求得 $C(Y)$ 和 $C(Y_m) = C(Y^{14,25})$ 的分解式如下:

$$\begin{aligned} C(Y) &= C(Y_1^{55})C(Y_2^{55,66,77}) + C(Y_1^{55,66})C(Y_2^{55,77}) + C(Y_2^{55,77})C(Y_2^{55,66}) \\ &\quad + C(Y_1^{55,66,77})C(Y_2^{55}) - C(Y_1^{55,67})C(Y_2^{55,76}) - C(Y_1^{55,76})C(Y_2^{55,67}), \\ C(Y_m) &= C(Y_1^{55})C(Y_{m2}^{55,66,77}) + C(Y_1^{55,66})C(Y_{m2}^{55,77}) + C(Y_1^{55,77})C(Y_{m2}^{55,66}) \\ &\quad + C(Y_1^{55,66,77})C(Y_{m2}^{55}) - C(Y_1^{55,67})C(Y_{m2}^{55,76}) - C(Y_1^{55,76})C(Y_{m2}^{55,67}). \end{aligned}$$

应用文献[8]中变形双图法求得各变形子双图的图行列式如下:

$$\begin{aligned} C(Y_1^{55}) &= C(Y_1) = y_6\{y_7[y_8(y_9 + y_{10} + y_{11}) + (y_9 + y_{10})y_{11}] \\ &\quad + y_8(y_9 + y_{11})y_{10} + y_8y_{10}y_{11}\} \\ &\quad + y_7\{y_9[y_8(y_{10} + y_{11}) + y_{10}y_{11}]\} + y_8y_9y_{10}y_{11}, \\ C(Y_1^{55,66}) &= (y_6 + y_8)[y_7(y_9 + y_{10} + y_{11}) + y_{10}(y_9 + y_{11})] \\ &\quad + y_7y_{10}(y_9 + y_{11}), \\ C(Y_1^{55,77}) &= y_6[(y_7 + y_8)(y_9 + y_{10} + y_{11}) + y_8(y_{10} + y_{11})] \\ &\quad + (y_7 + y_8)y_8(y_{10} + y_{11}), \\ C(Y_1^{55,66,77}) &= (y_6 + y_7 + y_8)(y_9 + y_{10} + y_{11}), \\ C(Y_1^{55,67}) &= y_6[y_7(y_9 + y_{10} + y_{11}) + y_8y_{10}] + y_8y_{10}(y_7 + y_8) = C(Y_1^{55,76}); \\ C(Y_2^{55,66,77}) &= (y_2 + y_4)(y_{12} + y_{13})[(y_1 + y_3)(y_{14} + y_{15}) + y_{14}y_{15}], \\ C(Y_2^{55,77}) &= (y_{12} + y_{13})\{y_2y_3y_4(y_{14} + y_{15}) + [y_2(y_3 + y_4) + y_3y_4] \\ &\quad \times [y_1(y_{14} + y_{15}) + y_{14}y_{15}]\}, \\ C(Y_2^{55,66}) &= (y_2 + y_4)[(y_1 + y_3)(y_{14} + y_{15}) + y_{14}y_{15}][y_5(y_{12} \\ &\quad + y_{13}) + y_{12}y_{13}], \\ C(Y_2^{55}) &= [y_5(y_{12} + y_{13}) + y_{12}y_{13}]\{y_2y_3y_4(y_{14} + y_{15}) + [y_2(y_3 \\ &\quad + y_4) + y_3y_4][y_1(y_{14} + y_{15}) + y_{14}y_{15}]\}, \\ C(Y_2^{55,76}) &= 0, \\ C(Y_2^{55,67}) &= -gy_2(y_{12} + y_{13})[(y_1 + y_3)(y_{14} + y_{15}) + y_{14}y_{15}]; \\ C(Y_{m2}^{55,66,77}) &= C(Y_{m2}^{55,77}) = C(Y_{m2}^{55,66}) = C(Y_{m2}^{55,67}) = 0, \\ C(Y_{m2}^{55}) &= C(Y_{m2}) = gy_{13}y_{14}y_{15}y_3, \\ C(Y_{m2}^{55,76}) &= y_{13}y_{14}y_3(y_2 + y_4). \end{aligned}$$

根据(1)式有

$$Z_{14,25} = \frac{-C(Y^{14,25})}{C(Y)} = \frac{-C(Y_m)}{C(Y)}.$$

将求得的 $C(Y)$ 和 $C(Y_m)$ 的符号展开式代入上式, 即得 $Z_{14,25}$ 的全符号表达式。

参 考 文 献

- [1] 黄汝激. 电子科学学刊, 1987, 9(3): 244—255.
- [2] 黄汝激. 中国科学, A辑, 1989, (4): 441—448.
- [3] Chen W K. IEEE Trans. on CT, 1969, CT-16(11): 518—526.
- [4] 黄汝激. 中国科学, A辑, 1988, (7): 759—767.
- [5] 黄汝激. 电子科学学刊, 1989, 11(3): 267—274.
- [6] 黄汝激. 电子科学学刊, 1991, 13(3): 242—249.
- [7] Starzyk J A, *et al.* IEEE Trans. on CAS, 1986, CAS-33(3): 302—315.
- [8] 黄汝激. 电子科学学刊, 1993, 15(4): 404—409.
- [9] 黄汝激. 电子学报, 1987, 15(3): 60—69.
- [10] 黄汝激. 电子学报, 1987, 15(1): 1—9.
- [11] 黄汝激. 电子科学学刊, 1985, 7(4): 254—266.

MODIFIED DOUBLE-GRAPH DECOMPOSITION ANALYSIS FOR FINDING SYMBOLIC NETWORK FUNCTIONS

Huang Ruji

(Beijing, University of Science and Technology, Beijing 100083)

Abstract The concepts of complementary cofactor pairs, normal double-graphs and feasible torn vertex sets are introduced. By using them a decomposition theorem for first-order cofactor $C(Y)$ is derived. Combining it with the modified double-graph method, a new decomposition analysis——modified double-graph decomposition analysis is presented for finding symbolic network functions. Its advantages are that the resultant symbolic expressions are compact and contain no cancellation terms, and its sign evaluation is very simple.

Key words Modified double-graph, Decomposition analysis, Symbolic network function