

一种高精度的稳定的色散边界条件¹

周健义 杨栓让

(东南大学毫米波国家重点实验室 南京 210096)

摘要 本文给出了一种高精度的稳定的色散边界条件 (DBC), 可应用于传输线的时域有限差分法 (FDTD) 的分析之中。我们用一个新的二阶差分式代替了边界条件中的微分算子。与 P. Y. Zhao 等人 (1994) 提出的色散边界条件相比, 本文中的边界条件具有相同的绝对稳定特性, 但具有更好的吸收性能。

关键词 吸收边界条件, 色散边界条件, 时域有限差分法

中图分类号 TN811

1 引言

时域有限差分法 (FDTD) 是一种用于分析传输线及其不连续性的全波分析方法^[1]。在应用 FDTD 的时候, 受计算机内存的限制, 只能在有限区域内的有限个数的 Yee 网格上进行迭代。因此, 在各个端口需引入吸收边界条件来模拟无穷长的传输线 (即接匹配负载)。对于色散较小的传输线, 一阶 Mur 吸收边界条件可得到良好的效果。对于大色散的传输线, 高阶的吸收边界条件才能满足要求。由 P. Y. Zhao 等人^[2]提出的一种新的色散边界条件克服了传统的高阶吸收边界条件^[3,4]的潜在不稳定的缺点, 可用于分析大色散传输线。但是, 文献 [2] 中的色散边界条件的截断误差是一阶的, 低于差分格式的截断误差的阶数, 当差分网格较大时, 由此引起的反射将明显变大。

本文用一组新的差分格式对色散边界条件中的微分因子进行离散化从而得到一组稳定的迭代格式, 适当选取其中的参数可得到具有二阶精度的迭代格式。应用这种色散边界条件对矩形波导进行分析得到满意的结果。

2 色散边界条件

考虑如下所示的边界条件:

$$\prod_{i=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial t} \right) E = 0, \quad (1)$$

我们用下式

$$\frac{(1-\theta)E^n(M) - E^n(M-1) + \theta E^n(M-2)}{\Delta x} + \frac{1}{\nu_i} \frac{(1-\theta)E^n(M) - E^{n-1}(M) + \theta E^{n-2}(M)}{\Delta t} \quad (2)$$

¹ 1995-05-01 收到, 1995-12-11 定稿
国家自然科学基金资助课题

来替代 (1) 中的微分算子 $(\partial/\partial x + (1/\nu_i)\partial/\partial t)E$, 其中, $0 \leq \theta \leq 1$ 。当 $\theta = 0$ 时, (2) 式与文献 [2] 中的差分格式是一致的。令

$$\rho_i = \nu_i \Delta t / \Delta x, \quad (3)$$

$$a_i = \rho_i / [(1 - \theta)(1 + \rho_i)], \quad (4)$$

$$b_i = 1 / [(1 - \theta)(1 + \rho_i)], \quad (5)$$

$$c_i = \theta a_i, \quad (6)$$

$$d_i = \theta b_i, \quad (7)$$

则 (2) 式可用如下算子:

$$k_i^d D_i E^n(M) \quad (8)$$

来表示。其中 k_i^d 为非零常数,

$$D_i = I - a_i Z_M^{-1} - b_i Z_n^{-1} + c_i Z_M^{-2} + d_i Z_n^{-2}, \quad (9)$$

$$Z_M^{-k_1} Z_n^{-k_2} E^n(M) = E^{n-k_2}(M - k_1). \quad (10)$$

由此, 差分格式的色散边界条件可表示为

$$\prod_{i=1}^N D_i E^n(M) = 0. \quad (11)$$

3 稳定性

如果

$$E = E_0 \exp[j(\omega t - k_x x)], \quad (12)$$

则在 (2) 式中有两个极点:

$$p_{1,2} = (1 \pm \sqrt{1 - 4A\theta}) / (2A), \quad (13)$$

其中

$$A = (1 - \theta)(1 + \rho_i) - \rho_i \exp(jk_x \Delta x) + \theta \rho_i \exp(j2k_x \Delta x). \quad (14)$$

图 1 给出了这两个极点的幅度, 我们可以看到, 当 $0 \leq \theta \leq 0.25$ 时, 色散边界条件是绝对稳定的。

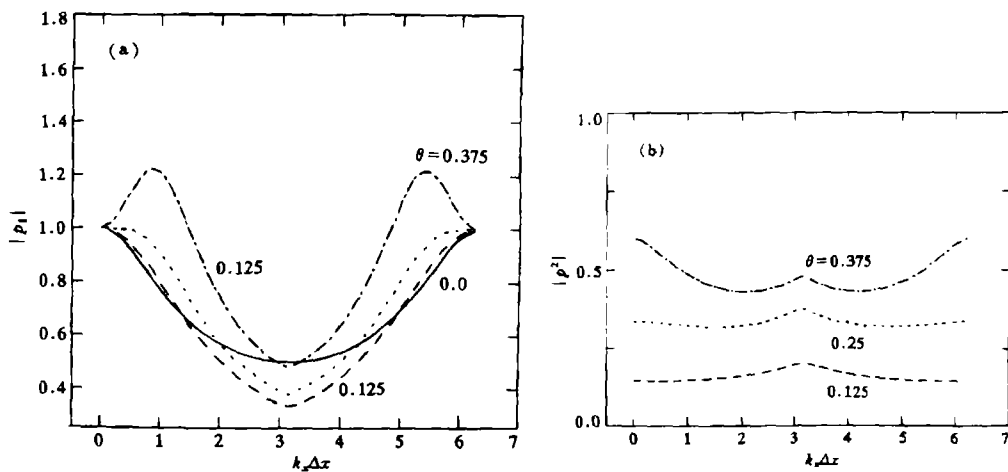


图 1 极点的幅度 (a) 极点 1 的幅度; (b) 极点 2 的幅度

4 截断误差

为了计算 (2) 式的截断误差, 我们将 $E^n(M-1)$ 和 $E^n(M-2)$ 分别用级数展开, 如 (15) 和 (16) 式所示:

$$E^n(M-1) = E^n(M) - \Delta x \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{1}{2} \Delta x^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + O(\Delta x^3), \quad (15)$$

$$E^n(M-2) = E^n(M) - 2\Delta x \frac{\partial E}{\partial x} + 2\Delta x^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + O(\Delta x^3). \quad (16)$$

于是, 我们可以得到:

$$\begin{aligned} & \frac{(1-\theta)E^n(M) - E^n(M-1) + \theta E^n(M-2)}{\Delta x} \\ &= (1-2\theta) \frac{\partial E}{\partial x} - \left(\frac{1}{2} - 2\theta\right) \Delta x \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + O(\Delta x^2). \end{aligned} \quad (17)$$

同理, 我们又可以得到:

$$\begin{aligned} & \frac{(1-\theta)E^n(M) - E^{n-1}(M) + \theta E^{n-1}(M)}{\Delta t} \\ &= (1-2\theta) \frac{\partial E}{\partial t} - \left(\frac{1}{2} - 2\theta\right) \Delta t \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + O(\Delta t^2). \end{aligned} \quad (18)$$

所以, 由 (2) 式所引起的截断误差为

$$\left(\frac{1}{2} - 2\theta\right) \Delta x \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{1}{\nu_i} \left(\frac{1}{2} - 2\theta\right) \Delta t \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + O(\Delta x^2 + \frac{1}{\nu_i} \Delta t^2). \quad (19)$$

在文献 [2] 中, $\theta = 0$, 所以, 其截断误差是 Δx 和 Δt 的一阶无穷小量。如果取 $\theta = 0.25$, 显然, 截断误差可提高到二阶。

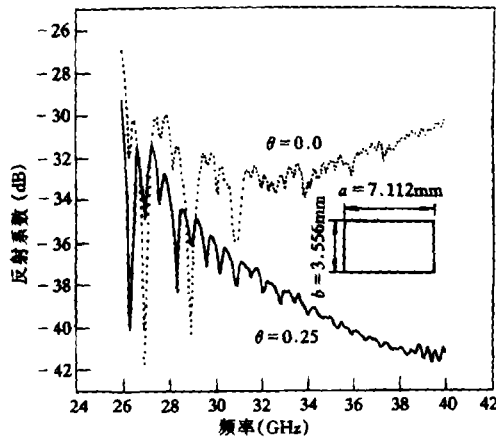


图 2 计算矩形波导时的反射

5 数值结果

我们用二阶的这种色散边界条件对矩形波导进行了分析并观察了由此引起的反射,如图 2 所示。很明显,我们的边界条件优越于文献 [2] 的结果。

6 总 结

由 P. Y. Zhao 等提出的色散边界条件解决了传统的高阶吸收边界条件的潜在不稳定性。但他们的边界条件的截断误差是一阶的,有时会引起较大的误差。本文在保证绝对稳定的前提下构造出具有二阶截断误差的边界条件,把这种边界条件应用到典型传输线的分析之中,所得结果说明了它的可靠性和优越性。

参 考 文 献

- [1] Zhang X L, Mei K. K. IEEE Trans. on MTT, 1988, MTT-36(7) : 1775-1787.
- [2] Zhao P Y, *et al.* IEEE MTT-S. Int. Microwave Symp. Dig., San Francisco : 1994, 35-38.
- [3] Bi Z Q, *et al.* IEEE Trans. on MTT, 1992, MTT-40(4) : 774-777.
- [4] Railton C, *et al.* IEEE Trans. on MTT, 1993, MTT-41(2): 290-297.

A HIGH ACCURACY STABLE DISPERSIVE BOUNDARY CONDITION

Zhou Jianyi Yang Quanrang

(*State Key Millimeter Wave Lab., Southeast University, Nanjing 210096*)

Abstract A high accuracy stable Dispersive Boundary Condition(DBC) is presented, which can be used to model wave propagation in transmission lines by the finite-difference time-domain method. The differential factor in the boundary condition is replaced by a new two-order difference scheme. The new DBC has the same absolute stability as that proposed by P. Y. Zhao, *et al.* (1994), but it has a much better absorbing performance.

Key words Absorbing boundary condition, Dispersive boundary condition, Finite-difference time-domain method

周健义: 男, 1971 年生, 硕士生, 研究方向为电磁场时域分析和低噪声放大器的设计.

杨铨让: 男, 1935 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为毫米波技术和电磁场数值方法.