

曲面参数二次模拟结合积分奇异降阶的矩量法数值计算¹

王浩刚 聂在平 王 军 胡 俊 姚海英

(电子科技大学微波工程系 成都 610054)

摘 要 该文研究了曲面参数二次模拟结合积分奇异降阶的数值方法,用于矩量法计算将目标体用参数二次曲面模拟,通过奇异降阶法把积分奇异性从 $O(1/R^2)$ 降至 $O(1/R)$ 。相比其它一些数值方法,该方法不但简化了自阻抗元素的计算复杂性,而且增加了计算的稳定性和精确性。该方法计算了某些目标体的雷达散射截面(RCS),其结果与其它方法所得结果相比较十分一致。

关键词 参数二次曲面,积分奇异性,RCS

中图分类号 TN015

1 引 言

在用矩量法计算三维闭合导体目标的矢量散射中,一般使用电场积分方程(EFIE):

$$\hat{t} \cdot \int_s ds' [\mathbf{J}(\mathbf{r}') + \frac{1}{k^2} \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') \nabla] \frac{e^{ikR}}{R} = \frac{4\pi i}{k\eta} \hat{t} \cdot \mathbf{E}^i(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in s \quad (1)$$

其中 $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, 算符 $\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right]$, $\nabla' = \left[\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'} \right]$.

选择适当的电流基函数和权函数,并对电场积分方程进行离散化,所得的阻抗矩阵元素的计算表达式为

$$\begin{aligned} A_{qp} &= \int_s dst_q(\mathbf{r}) \cdot \int_{s'} ds' [j_p(\mathbf{r}') + \frac{1}{k^2} \nabla' \cdot j_p(\mathbf{r}') \nabla] \frac{e^{ikR}}{R} \\ &= \int_s dst_q(\mathbf{r}) \cdot \int_{s'} ds' j_p(\mathbf{r}') \frac{e^{ikR}}{R} + \frac{1}{k^2} \int_s dst_q(\mathbf{r}) \cdot \int_{s'} ds' \nabla' \cdot j_p(\mathbf{r}') \nabla \frac{e^{ikR}}{R} \\ &= I_1 + I_2, \quad p, q = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (2)$$

(2) 式为对场点定义域和对源点定义域的积分,其中 $t_q(\mathbf{r})$ 和 $j_p(\mathbf{r})$ 分别为权函数和基函数。对于三维目标,(2) 式积分重数随基,权函数选择的不同而不同。若采用伽略金法其重数为 4,采用线匹配,其重数为 3,点匹配的积分重数为 2 等。采用伽略金法可有很好的积分稳定性,并且可使 (2) 式的积分奇异性降至 $O(1/R)$ 。但是由于积分重数为 4,计算量非常大,且积累误差也会变大。而一般的点匹配法虽然积分容易,但是由于脉冲基的不连续性,对目标体的表面电流的模拟精度很难达到要求。

针对以上状况,国内外有很多学者开始使用三角基线匹配方法^[1-4],即以屋顶函数(rooftop functions)作为基函数,以剃刀函数(razor functions)作为权函数。利用三角基线匹配法的一个好处是对场点的积分域由面元变为线元,从而使积分重数减小为三重。

但是,由 (1) 式可以看出当场点等于源点时,其积分奇异性表现为 $1/R$ 与 $\nabla(\exp(ikR)/R)$ 的奇异性,分别具有 $O(1/R)$ 和 $O(1/R^2)$ 阶。目前,解决只含 $O(1/R)$ 阶奇异积分的方法一般

¹ 1999-11-18 收到, 2000-10-18 定稿
国家自然科学基金资助项目

为“加一项，减一项”方法^[3]。而解决含 $O(1/R^2)$ 这一高阶奇异性的积分方法有“挖除有限小块”法^[3]，等效分离方法^[4]，以及奇异性降阶的思想^[2,5]。挖除有限小块法的主要思想为用一有限的矩形块包围奇异点，并证得矩形块区域的积分无贡献^[3]，从而把积分的奇异性消除。但其中的近似 $\mathbf{R} \approx \mathbf{R}_0$ (\mathbf{R}_0 的表达可见 (13) 式) 成立的条件在某些特殊条件下不易满足。比如，当采用参数二次曲面模拟一个很小的三角单元，并使其对应于参数空间中一矩形块时，作近似 $\mathbf{R} \approx \mathbf{R}_0$ 是很粗糙的。所以挖除有限小块法较适用于一些无尖顶的物体。而 Newman^[4] 提出的等效分离法则利用了把某一矩形平板单元的自阻抗项等效地分离为多个互阻抗之和。这一方法的局限性在于很难推广到比较复杂的情形，如具有曲率变化的单元。奇异性降阶的思想则是通过矢量恒等式把含 $O(1/R)$ 阶的奇异性的被积项变换为只具有 $O(1/R)$ 阶奇异性，从而可用奇异分离方法精确处理含 $O(1/R)$ 阶奇异性的积分。同时还可使积分重数降低，有些积分项可直接用解析表达，所以计算量将大大减小且积累误差可降至最小。本文分析了此一方法，利用参数二次曲面剖分目标体，三角基函数模拟其表面受激电流密度，再使用剃刀函数作为测试函数，从而把文献 [1,2] 的方法结合起来，得到参数二次曲面模拟结合积分奇异降阶法。此一方法既具备了参数二次曲面方法对目标体模拟的简易性，又不失阻抗矩阵元素 (尤其是自阻抗矩阵元素) 计算的精确和快捷。

2 参数二次曲面模拟贴片以及权函数和基函数的表达

参数二次曲面公式为

$$\mathbf{r} = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 C_{ij} u_1^i u_2^j \quad (3)$$

其中， \mathbf{r} 为曲面上一点的矢径。只要任意给出曲面上 9 点的空间坐标及其对应的参数空间坐标，矢量系数 C_{ij} 即可确定。然后对模拟的曲面块再细分为多个有公共边的单元。图 1 为某块曲面在参数空间中划分单元示意图。

在参数空间中，我们选择了剃刀函数作为权函数，它有如下表达：

$$t_q = \hat{\mathbf{I}} \quad (4)$$

单位矢量 $\hat{\mathbf{I}}$ 为参数曲面坐标的基矢 ($\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$) 的单位方向，并且其定义域只在两单元的中心连线上，如图 2。由于权函数为单变量函数，从而 (2) 式对场点的积分域由面域变为线域。

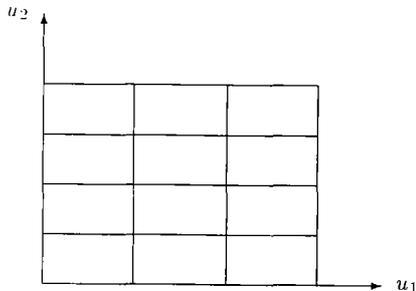


图 1 某曲面块在参数空间分成多个单元



图 2 权函数定义域 (两中心点连线) 及基函数定义域 (两相邻单元上)

而基函数则选择屋顶函数的形式，如下：

$$\mathbf{j}_{uip} = \frac{1}{\sqrt{g(u'_1, u'_2)}} T_{uip}(u'_i) \mathbf{e}_i, \quad (5)$$

$$i\omega\sigma = \nabla'_s \cdot \mathbf{j}_{uip} = -\frac{1}{\sqrt{g(u'_1, u'_2)}} \frac{\text{sgn}(u'_i - u'_{ip})}{\Delta u'_i} W(u'_i) \quad (6)$$

(6) 式中 $\nabla'_s \cdot$ 为表面散度算子。由于方程 (1), (2) 式的积分域为表面, 即电流基函数的定义域为表面, 所以 $\nabla'_s \cdot \mathbf{j}_{uip} = \nabla' \cdot \mathbf{j}_{uip}$ 。 (5), (6) 式中 $i = 1$ 时, $j = 2$; $i = 2$ 时, $j = 1$ 。 T_{uip} 为三角基函数。 g 则为度规系数。

$$W(u'_i) = \begin{cases} 1, & u'_{im} - \Delta u'_i < u'_i < u'_{im} + \Delta u'_i \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (7)$$

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad (8)$$

由 (5) 式可知在实际空间中电荷分布是非均匀的。但在参数空间中的分布 $\sigma ds' / (du'_1 du'_2)$ ($ds' = \sqrt{g(\mathbf{r}')} du'_1 du'_2$ 为微面元) 则变得均匀了。这有利于简化阻抗计算 (2) 式的被积函数。

3 阻抗计算—积分的奇异降阶法

(2) 式为阻抗计算公式。对互阻抗元素的计算可采用普通的数值积分, 而对于自阻抗元素 (即 $s \cap s' \neq \emptyset$) 我们采用了奇异降阶法。降阶法基于如下矢量恒等式:

$$\nabla \cdot (\mathbf{A}\mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B} + \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (9)$$

于是, (2) 式中的第 2 项将变为

$$I_2 = \frac{1}{k^2} \int_{s'} ds' \nabla' \cdot \mathbf{j}_p(\mathbf{r}') \int_l dl \left[\nabla_l \cdot \left(\hat{\mathbf{I}} \frac{e^{ikR}}{R} \right) - \frac{e^{ikR}}{R} \nabla_l \cdot \hat{\mathbf{I}} \right] \quad (10)$$

(10) 式中 l 表示权函数的定义域。其后一项由权函数的性质决定为零。而前一项由高斯散度定理可得

$$I_2 = \frac{1}{k^2} \int_{s'} ds' \nabla' \cdot \mathbf{j}_p(\mathbf{r}') \frac{e^{ikR}}{R} \Big|_{r^-}^{r^+} = \int_{s'} du'_1 du'_2 f(\mathbf{r}') \frac{e^{ikR}}{R} \Big|_{r^-}^{r^+} \quad (11)$$

其中 r^+ , r^- 分别为两相邻单元的中心点矢径, 亦即权函数定义域的两个端点, 如图 2。而 $f(\mathbf{r}') = \sqrt{g(\mathbf{r}')} \nabla' \cdot \mathbf{j}_p(\mathbf{r}') / k^2$ 。

比较 (11) 式和 (2) 式后可知, 通过上述步骤, 本身为具 $O(1/R^2)$ 奇异性的积分 I_2 被降阶为如 $I-1$ 那样只具 $O(1/R)$ 阶奇异性, 这就是奇异降阶法。

对于只含 $O(1/R)$ 阶奇异性的积分可采用经推广的加减奇异项的方法求解^[3]:

$$\int \int f(\mathbf{r}') \frac{e^{ikR}}{R} du'_1 du'_2 = \int \int \left[f(\mathbf{r}') \frac{e^{ikR}}{R} - f(\mathbf{r}) \frac{1}{R_0} \right] du'_1 du'_2 + f(\mathbf{r}) \int \int \frac{1}{R_0} du'_1 du'_2 \quad (12)$$

其中 R_0 为通过对 $R(r, r')$ 的 r' 在 r 邻域用泰勒级数展开, 取近似获得, 表达式如下:

$$R_0 = \sqrt{g_{11}(u'_1 - u_1)^2 + g_{22}(u'_2 - u_2)^2 + 2g_{12}(u'_1 - u_1)(u'_2 - u_2)} \quad (13)$$

显然, 当 $R \rightarrow 0$ 时, e^{ikR}/R 与 $1/R_0$ 趋势一致. (12) 式中第 1 项被积函数在积分域上连续有限, 而第 2 项有解析解, 形式如下:

$$\int_{\Delta s} \frac{du'_1 du'_2}{R_0} = \left\{ \frac{u'_1 - u_1}{\sqrt{g_{22}}} \ln[R_0 + \sqrt{g_{22}}(u'_2 - u_2) + (u'_1 - u_1)g_{12}/\sqrt{g_{22}}] + \frac{u'_1 - u_1}{\sqrt{g_{22}}} \ln[R_0 + \sqrt{g_{22}}(u'_2 - u_2) + (u'_1 - u_1)g_{12}/\sqrt{g_{22}}] \right\} \Big|_{u'_1=u_{11}}^{u'_1=u_{12}} \Big|_{u'_2=u_{21}}^{u'_2=u_{22}} \quad (14)$$

积分域 $\Delta s = U_1 \times U_2$; 集合 $U_1 = (u_{11}, u_{12})$ 及 $U_2 = (u_{21}, u_{22})$.

4 数值计算结果

首先观察自阻抗计算的收敛性. 图 3(a) 为电尺寸 $ka=100$ 的导体球的某一自阻抗元素随单元一维方向上求积节点数变化图. 从中可看出利用参数二次曲面奇异降阶法可在为数很少个节点的情况下使自阻抗元素的计算达到稳定, 图中呈现为一条平行线, 而采用挖除有限小块法则很难稳定, 图中呈现为振荡曲线 (最后还是收敛). 这是由于该自阻抗的场点和源点积分域在实际空间为一很尖的三角曲面块, 但其在参数空间中的形状则变为矩形块 (如图 3(b)), 从而导致 $R \approx R_0$ 的近似不成立. 而采用参数二次曲面奇异降阶法无需作如此近似. 通常 (以下各算例) 每个权函数定义域上只取 4 点 (每单元各两点), 而基函数的定义域上一维方向仅取 2 点, 另一维则取 4 点. 其自阻抗计算的效果就如图 3(a) 中的横坐标为 2 时的降阶法阻抗计算效果.

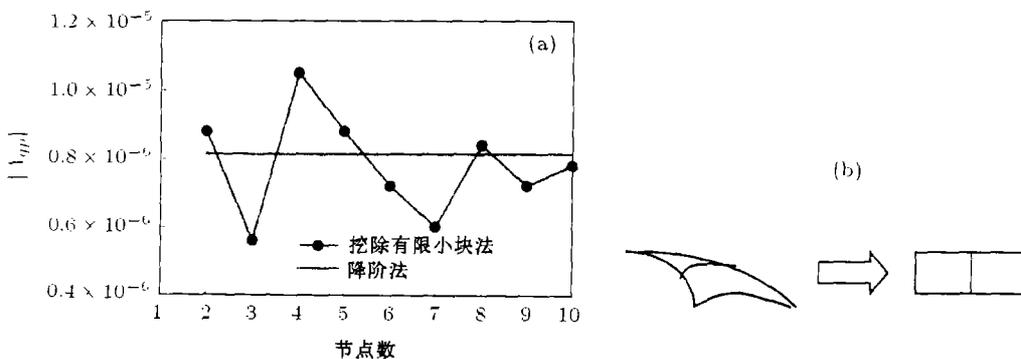


图 3 (a) 数值计算稳定性图 (b) 实际空间的三角块变为参数空间中的矩形块

图 4 为 $ka = 0.5$ 的导体球的 E 面双站 RCS 曲线. 图 5 为两端开口无限薄金属导体圆柱受到来自于圆柱轴向的平面波照射的 E 面双站 RCS 曲线, 圆柱半径的电尺寸为 $ka = 1$, 圆柱长度的电尺寸为 $kl = 2\pi$. 从这两图可以看出参数二次曲面奇异降阶法 (图中的带交叉线) 和挖除有限小块法在求解电小尺寸物体时所得的结果是相互吻合的.

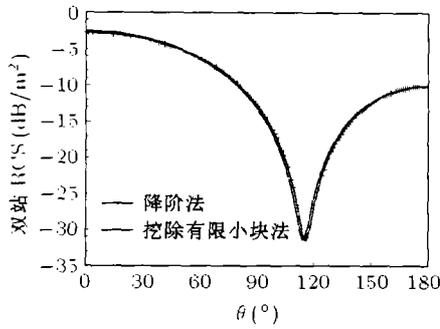


图 4 $ka = 0.5$ 的导体球的 E 面双站 RCS

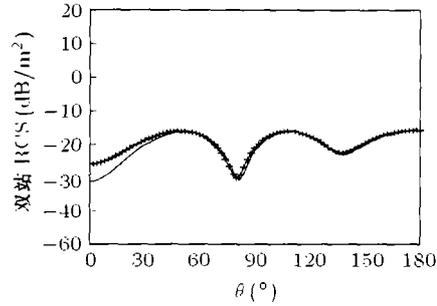


图 5 两端开口导体柱德 E 面双站 RCS 基函数定义域 (两相邻单元上)

图 6 为 $ka = 1.1$ 的导体球的 E 面和 H 面的双站 RCS。图 7 则为 $ka = 2.9$ 的导体球的 E 面和 H 面的双站 RCS。它们分别与文献 [2] 的计算结果相一致。

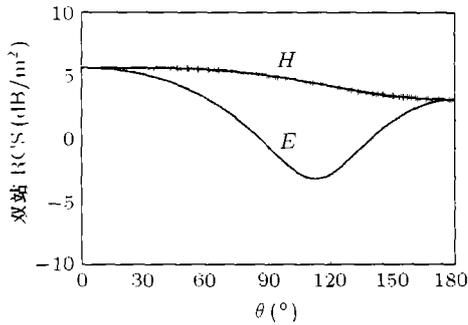


图 6 $ka = 1.1$ 的导体球的双站 RCS

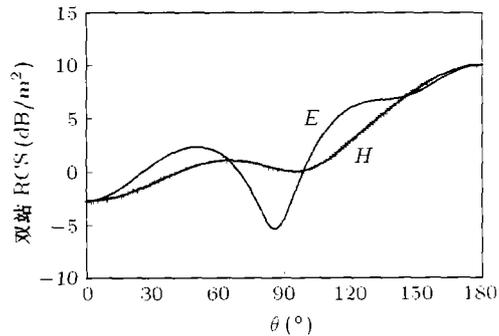


图 7 $ka=2.9$ 的导体球的双站 RCS

图 8 NASA 核长 $0.3556m^{[4]}$ ，其一端呈尖顶状。图 9 为入射电场 (2GHz) 在 xoy 平面扫描时的 V，H 极化单站 RCS，所用未知量为 624 个，与 Newman^[4]655 个未知量的结果相吻合。这说明了用参数二次曲面结合奇异降阶法能精确计算尖点附近的自阻抗，并且相比多边形平板法有减小运算量的优点。

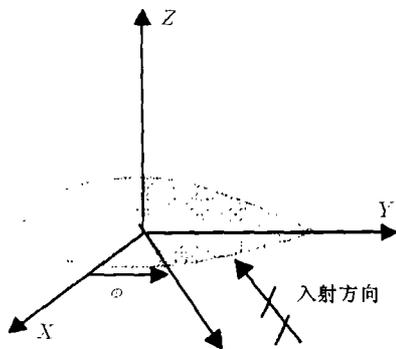


图 8 平面波照射下 NASA 核

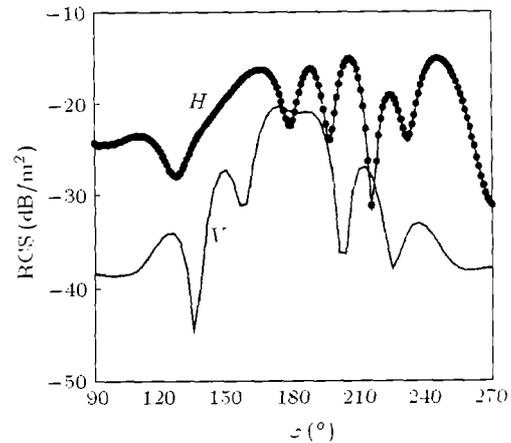


图 9 NASA 核的单站 RCS 计算结果

图 10 为 $ka=4.7$ 的导体球的 E 面和 H 面双站 RCS，与文献 [2] 的相应结果吻合得相当好，且相比之下使用本文的物体参数二次曲面模拟比文献 [2] 的 NURBS 曲面和 Bezier 块模拟实现起来更容易。

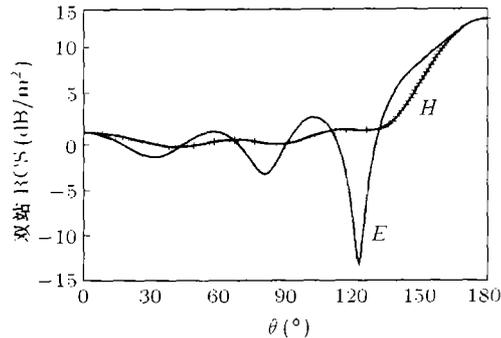


图 10 $ka=4.7$ 的导体球的 E 面和 H 面双站 RCS

6 结 论

利用参数二次曲面结合奇异降阶法的优点如下：(1) 参数二次曲面模拟物体具有简易性，且相比多角平板模拟和三角平板模拟更具精确性；(2) 利用积分奇异降阶法后，被积函数的奇异性被降至能用加减奇异项精确计算的 $O(1/R)$ 阶，从而使数值计算变得极其稳定（仅需为数极少的几个高斯求积节点）；(3) 利用线匹配使积分重数降至最多为 3 重；(4) 由 (11) 式， I_2 的计算实际上为 2 重积分；(5) $\sigma ds' / (du'_1 du'_2)$ 在参数空间为常数，从而简化了被积函数；(6) 由于无须作近似 $\mathbf{R} \approx \mathbf{R}_0$ ，故可精确算出物体尖点附近的自阻抗元素。由于该法使用的参数二次曲面简便而又精确地模拟了目标体形状，对奇异性的降阶处理方法计算稳定且精确，比一般方法（如：等效分离法，挖除有限小块法以及伽略金法和点匹配法）具有既快速又精确的特性。

参 考 文 献

- [1] J. M. Song, W. C. Chew, Moment method solutions using parametric geometry, *J. of EM Wave and Applications*, 1995, 9(1/2), 71-83.
- [2] L. Valle, *et al.*, Combining the moment method with geometrical modelling by NURBS surfaces and Bezier patches, *IEEE Trans. on AP*, 1994, 42(3), 373-381.
- [3] 王浩刚, 聂在平, 三维矢量散射积分方程中奇异性的分析, *电子学报*, 1999, 27(12), 68-72.
- [4] E. H. Newman, Polygonal plate modeling, *Electromagnetics*, 1990, 10(2), 65-83.
- [5] W. A. Johnson, Modeling scattering from and radiation by arbitrary shaped objects with the electric field integral equation triangular surface patch code, *Electromagnetics*, 1990, 10(1), 41-63.

NUMERICAL CALCULATION OF COMBINING SURFACE
PARAMETRIC QUADRATIC MODELING WITH REDUCING
SINGULARITY ORDER OF INTEGRAL IN MOMENT METHOD

Wang Haogang Nie Zaiping Wang Jun Hu Jun Yao Haiying

(Dept. of Microwave Eng., UEST of China, Chengdu 610054, China)

Abstract In this paper, the numerical method of combining surface parametric quadratic modeling with singularity orders reducing in moment method is analyzed. The objects are modeled by parametric quadratic surface. The singularity order of the integral is reduced from $O(1/R^2)$ to $O(1/R)$. Compared with other methods, this method simplifies the complexity of self-impedance elements calculating and increases its calculating stability and accuracy. It is applied to calculating RCS of some objects. Good agreement with the results from some other methods is found.

Key words Parametric quadratic surface, Singularity in integral, RCS

- 王浩刚: 男, 1974 年生, 博士生, 研究方向包括电磁散射的高效数值方法, 腔体的散射计算等.
聂在平: 男, 1946 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向包括非均匀介质中的场与波, 电磁辐射与散射理论及电磁场高效数值方法等.
王 军: 男, 1975 年生, 博士生, 研究方向为电磁散射的近场计算.
胡 俊: 男, 1973 年生, 博士, 研究方向为电磁散射的高效数值方法.
姚海英: 女, 1974 年生, 博士生, 研究方向为电磁散射的高效数值方法.