

# 缓变截面波导腔的理论及其应用\*

钱景仁

(中国科学技术大学)

## 提 要

本文从广义电报方程出发,在确定的边界条件和连续性条件下,得到了缓变截面波导腔中振荡模的谐振频率、品质因数和场分布的公式。着重研究了开放式缓变圆截面波导腔中  $H_{0np}$  模振荡,特别是这些模在开口处的衍射损耗;最后对常用的一种双圆锥开放腔体进行了分析,得到了一组较为通用的谐振频率和品质因数的曲线。已有的实验证实了曲线的可靠性。

### 一

在多模波导传输系统中出现的谐振现象往往起源于在某两个波导截面间某种波型传输相位合适而谐振,特别是两过渡器或波型变换器之间,这一现象更为严重。这实质上是变截面波导腔的谐振现象。近年来,缓变截面波导腔成功地运用于自由电子微波激光器中<sup>[1,2]</sup>,使电子束和电磁场相互作用更为有效,从而提高了输出功率和工作效率。

在文献[1]中,仅在某些特定的形状和尺寸下,用数值计算法得到了缓变截面波导腔体的设计曲线,并没有给出这种腔体的较一般的特性公式和曲线。本文就尝试解决这一问题,首先将从广义电报方程出发,得到了缓变截面波导腔中振荡模的谐振频率、品质因数和场分布的公式;并着重研究了开放式缓变圆截面波导腔中  $H_{0np}$  模,特别是这些模在开口处的衍射损耗。按上述理论,对目前自由电子微波激光器中一种常用的结构,即对双圆锥腔体进行分析,得到了一组较为通用的谐振频率和外界品质因数的曲线。已有的实验结果证实了曲线的可靠性,从而向这类腔体设计的工程化迈出了一步。

### 二

首先研究缓变截面波导腔中振荡模的一般特性,并由此得到各模的参数。缓变截面波导腔是由一段缓变截面波导构成的。它的两端由于加入膜片、或因波型截止、或其他原因形成很强的反射。很自然,这种腔中的振荡模可看成是缓变截面波导本地简正波在正、反两个方向上相互叠加的结果,即某一截面上电磁场可表示为<sup>[3]</sup>:

$$E_z = \sum_k V_k e_k(x),$$

\* 1980年9月29日收到,1981年8月3日修改定稿。

$$\mathbf{H}_z = \sum_k I_k \mathbf{h}_k(z); \quad (1)$$

其中  $z$  为轴向坐标;  $\mathbf{e}_k(z)$ ,  $\mathbf{h}_k(z)$  分别是与  $z$  处截面相同的理想直波导中电、磁矢量波函数;  $V_k$  和  $I_k$  为幅度函数, 满足方程<sup>[4]</sup>:

$$-\frac{dV_k}{dz} = j\beta_k Z_k I_k - \sum_i V_i T_{ik}, \quad (2a)$$

$$-\frac{dI_k}{dz} = j \frac{\beta_k}{Z_k} V_k + \sum_i I_i T_{ki}; \quad (2b)$$

其中  $\beta_k$ 、 $Z_k$  为某波型(电波或磁波)的传输常数和特性阻抗;  $T_{ik} = \int_{\Omega} \mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial z} d\Omega$ ,  $\Omega$  为  $z$  处的截面积。

由(2)式, 消去  $V_k$  或  $I_k$ , 得二阶微分方程。对于磁波,  $\beta_k Z_k = \omega\mu$  为常量(由于波导填充媒质是均匀的), 得

$$-\frac{d^2 V_k}{dz^2} = \beta_k^2 V_k - \sum_{i \neq k} j\omega\mu I_i T_{ki}; \quad (3)$$

对于电波, 同理  $\beta_k/Z_k = \omega\varepsilon$  为常量, 得

$$-\frac{d^2 I_k}{dz^2} = \beta_k^2 I_k + \sum_{i \neq k} j\omega\varepsilon V_i T_{ik}. \quad (4)$$

推导(3)、(4)式时, 忽略  $\text{tg}^2\theta$  项和  $\frac{d}{dz} \text{tg}\theta$  项, 其中  $\text{tg}\theta$  为纵剖面上边界的斜率。由于这里研究的是缓变的情况, 因此保留与  $\text{tg}\theta$  正比的  $T_{ik}$  项, 而忽略上述两项是合理的。

在缓变截面波导腔中各模不存在兼并的情况下(因此非振荡模的  $V_i$ 、 $I_i$  远小于单一振荡模的  $V_k$ 、 $I_k$ ), 由(3)、(4)式可知, 模间耦合  $T_{ik}(i \neq k)$  对振荡模的影响, 包括谐振频率、场分布, 必须通过波型变换和反变换两个过程, 因此影响的大小是在  $\text{tg}^2\theta$  项的量级, 是可以忽略的。这样(3)、(4)式进一步简化成:

$$\frac{d^2 V_k}{dz^2} + \beta_k^2 V_k = 0 \quad (\text{对于磁波}); \quad (5)$$

$$\frac{d^2 I_k}{dz^2} + \beta_k^2 I_k = 0 \quad (\text{对于电波}). \quad (6)$$

这样, 缓变截面波导腔中模的振荡就可用(5)或(6)式在一定边界条件下来描述, 式中  $\beta_k$  并没有限制, 即可为正值、负值或零。

下面给出波导腔的边界条件。对于在  $z=0$  和  $z=s$  两端放置膜片的情况(见图1), 用反射系数来表示边界条件, 即

$$\begin{aligned} \rho_0 &= -e^{j\delta_0} (z=0), \\ \rho_s &= -e^{j\delta_s} (z=s). \end{aligned} \quad (7)$$

一般  $|\delta_0| \ll 1$ ,  $|\delta_s| \ll 1$ 。

对于某波型截止面(或称临界截面)处在  $z=0$  和  $z=s$  的情况, 用等效反射系数来表示边界条件, 即用文献[5]的结果, 在  $z=0$  和

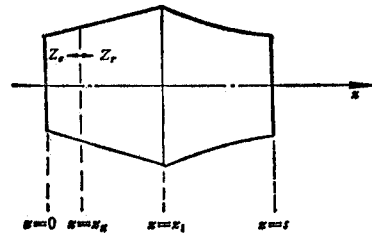


图1 Fig. 1

$z=s$  面上(该面随频率和波型而变动),同样可用(7)式表达,但其中  $\delta_0 = -\frac{\pi}{2} + \delta_{00}$ ,  $\delta_s = -\frac{\pi}{2} + \delta_{0s}$  (对于磁波),又  $|\delta_{00}| \ll 1$ ,  $|\delta_{0s}| \ll 1$ . 这是在临界截面上的等效反射系数,不是真实的,是在远离临界截面处,即满足

$$\left| \frac{1}{\beta_k^2} \frac{d\beta_k}{dz} \right| \ll 1 \quad (8)$$

条件处的反射系数,用几何光学法<sup>[5]</sup>推算出在临界截面上等效的反射系数. 在紧靠临界截面附近,不满足(8)式,用几何光学法求解是不行的<sup>[5]</sup>. 如果要将几何光学法推广用于这个区域,则为了使远离临界截面处的场不受影响,在临界截面上必须存在一个等效的边界条件. 这样反过来如果在临界截面上采用等效边界条件,即可在  $z=0$  到  $z=s$  整个区域内,采用几何光学法. 下面(12)式也表达了这一点.

另外,值得注意这样一种情况,如图1所示,截面是缓变的,但倾角  $\theta$  在  $z=z_1$  处不连续,则  $\theta$  的导数将不存在,这样推导出(3)式的前提不存在,因此(5)、(6)式在  $\theta$  不连续处一般就不适用了,而需要分段解(5)、(6)式,再在  $z=z_1$  处用连续性条件. 这一点在文献[1]中忽视了,必然在计算谐振频率和品质因数时,引入一定的误差.

在  $z=z_1$  处的连续性条件为

$$(V_k)_{z=z_1^-} = (V_k)_{z=z_1^+}, \quad (9a)$$

$$(I_k)_{z=z_1^-} = (I_k)_{z=z_1^+}. \quad (9b)$$

对于磁波,将(2a)式代入(9b)式,可得

$$\left( \frac{dV_k}{dz} \right)_{z=z_1^+} = \left( \frac{dV_k}{dz} \right)_{z=z_1^-} + V_k \Delta T_1, \quad (10)$$

其中

$$\Delta T_1 = \int_{\Omega} \mathbf{e}_k \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial z} \right)_{z=z_1^+} - \left( \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial z} \right)_{z=z_1^-} \right] d\Omega.$$

对于电波,将(2b)式代入(9a)式,得

$$\left( \frac{dI_k}{dz} \right)_{z=z_1^+} = \left( \frac{dI_k}{dz} \right)_{z=z_1^-} - I_k \Delta T_1. \quad (11)$$

缓变(且容许  $\theta$  角有小突变)截面波导腔中的电磁场,就可从方程(5)、(6)式出发,在边界条件(7)式及连续性条件(9)、(10)、(11)式下求解而得.

下面研究自由电子微波激励器中常用的磁波在缓变截面波导腔中的振荡. 如果在波导腔内对振荡模不存在临界截面的情况,即到处满足(8)式,就可以采用几何光学法求解(5)式;如果波导腔一端或两端是临界截面,按上述讨论,如果运用等效边界条件,则仍可用几何光学法求解\*,因此

$$V_k = \frac{A_1^+ e^{-j \int_0^z \beta_k dz} + A_1^- e^{j \int_0^z \beta_k dz}}{\sqrt{\beta_k}}, \quad (0 \leq z \leq z_1)$$

\* 如上所述,在临界截面附近,用(12)式表达  $V_k$  是不正确的,但为了将它推广到  $\beta_k=0$  的情况,形式上必须令该处等效的  $A_1^+$  和  $A_1^-$  也趋于零,而其比值为有限值.

$$= \frac{A_2^+ e^{-i \int_{z_1}^z \beta_k dz} + A_2^- e^{i \int_{z_1}^z \beta_k dz}}{\sqrt{\beta_k}}, \quad (z_1 \leq z \leq s) \quad (12)$$

利用边界条件(7)式及连续性条件(9a)(10)式, 确定各  $A$  值, 最后可得该模振荡条件.

$$2 \int_0^s \beta_k dz - \delta_0 - \delta_s + \frac{2\Delta T_1}{\sqrt{\beta_k(z_1)}} \sin^2 \left[ \frac{\delta_s}{2} - \int_{z_1}^s \beta_k dz \right] = 2p\pi \quad (13)$$

这里假定腔两端为全反射, 因此  $\delta_0$  和  $\delta_s$  为实数, 在下面求品质因数时, 将考虑复数情况.

如果波导腔内存在多个  $\theta$  角不连续(在  $z_i$  处  $T_{kk}$  的跃变为  $\Delta T_\nu$ ), 则振荡条件应为

$$2 \int_0^s \beta_k dz - \delta_0 - \delta_s + \sum_\nu \frac{2\Delta T_\nu}{\sqrt{\beta_k(z_i)}} \sin^2 \left[ \frac{1}{2} \delta_s - \int_{z_i}^s \beta_k dz \right] = 2p\pi, \quad (14)$$

其中  $p = 1, 2, 3 \dots$  代表振荡模纵向指标.

现在研究振荡模的品质因数. 有载品质因数  $Q_L$  由外界品质因数  $Q_R$  和无载品质因数  $Q_0$  决定.  $Q_R$  是由外界耦合决定, 在这里就是由  $\delta_0$  和  $\delta_s$  的虚部决定;  $Q_0$  则由腔内的金属损耗和截面改变引起的波型变换损耗决定. 由于近似解(12)式中, 忽略了波型变换, 因此由此解推得的  $Q_0$  不包含这一因素.

前面已将腔内的振荡看成是不规则波导中波型来回反射的结果, 因此可将(1)式中的  $V_k$  和  $I_k$  分解为正向波  $A^+$  和反向波  $A^-$ :

$$\begin{aligned} A^+ &= \frac{1}{2} \frac{V_k + I_k Z_k}{\sqrt{Z_k}}; \\ A^- &= \frac{1}{2} \frac{V_k - I_k Z_k}{\sqrt{Z_k}}. \end{aligned} \quad (15)$$

由此可得阻抗  $Z = V_k/I_k$  和反射系数  $\rho = A^-/A^+$  间的关系:

$$\rho = \frac{Z - Z_k}{Z + Z_k}$$

即归一化阻抗为

$$\frac{Z}{Z_k} = \frac{1 + \rho}{1 - \rho}. \quad (16)$$

现在将图 1 上  $z = z_x$  处截面向左、右看入的归一化阻抗  $Z_l$  和  $Z_r$  相串联, 构成一谐振回路. 对于谐振回路, 谐振时回路总电抗应为零; 另外按文献[6]第 7.9 节,

$$Q_L = \frac{1}{R} \frac{\omega_0}{2} \left( \frac{\partial X}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega_0} \quad (17)$$

其中  $R + jX$  为回路总阻抗值.

求  $Z_l$  和  $Z_r$  时, 原则上  $z_x$  可取  $[0, S]$  区间任意值, 但为了便于取  $z_x = 0$ . 如上所述, 当  $z = 0$  为临界截面时, 阻抗仅起等效作用, 且求反射系数可直接用(12)式. 由(16)式可得

$$Z_l = \frac{1 - e^{j\delta_0}}{1 + e^{j\delta_0}} = -\text{th} \delta_0; \quad (18)$$

$$Z_r = \frac{1 + \frac{A_1^-}{A_1^+}}{1 - \frac{A_1^-}{A_1^+}}. \quad (19)$$

其中  $A_1^-/A_1^+$  表示  $z = 0$  处向左传输的反射系数 (对开放腔应理解为等效反射系数, 下同). 由(12)式出发求  $A_1^-/A_1^+$  值, 但因考虑到腔壁金属损耗,  $j\beta$  值应改成  $j\beta + \alpha^*$ , 于是运用  $z = s$  处的边界条件和  $z = z_1$  处的连续性条件; 又考虑到反射损耗,  $\delta_0 = \delta'_0 + j\delta''_0$ ,  $\delta_s = \delta'_s + j\delta''_s$ , 可得

$$\frac{A_1^-}{A_1^+} = -\exp\left\{j\delta_s - j2\int_0^s \beta_k dz - j\frac{2\Delta T_1}{\sqrt{\beta_k(z_1)}} \sin^2\right. \\ \left.\times \left[\frac{\delta_s}{2} - \int_{z_1}^s \beta_k dz\right] - 2\int_0^s \alpha dz\right\}, \quad (20)$$

将(20)式代入(19)式, 并令  $Z_r + Z_l = R + jX$ , 在  $\delta''_0 \ll 1$ ,  $\delta''_s \ll 1$ ,  $\int \alpha dz \ll 1$  的情况下, 得

$$X = \operatorname{tg} \left[ \int_0^s \beta_k dz - \frac{\delta'_s}{2} + \frac{\Delta T_1}{\sqrt{\beta_k(z_1)}} \sin^2 \left( \frac{\delta'_s}{2} - \int_{z_1}^s \beta_k dz \right) \right] - \operatorname{tg} \frac{\delta'_0}{2}, \quad (21a)$$

$$R = \frac{\delta''_0}{2} \sec^2 \frac{\delta'_0}{2} + \left( \frac{\delta''_s}{2} + \int_0^s \alpha dz \right) \sec^2 \left[ \int_0^s \beta_k dz - \frac{\delta'_s}{2} \right. \\ \left. + \frac{\Delta T_1}{\sqrt{\beta_k(z_1)}} \sin^2 \left( \frac{\delta'_s}{2} - \int_{z_1}^s \beta_k dz \right) \right]. \quad (21b)$$

由  $X = 0$ , 则又可得(13)式, 但式中  $\delta_0$  和  $\delta_s$  都改为  $\delta'_0$  和  $\delta'_s$ ; 由(17)式并考虑到(21a)式右边大括号中第一项起主要作用, 并是频率的快变函数, 得

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{\delta''_0 + \delta''_s}{2\pi \int_0^s \lambda_g dz} + \frac{\int_0^s \alpha dz}{\pi \int_0^s \lambda_g dz}, \quad (22a)$$

即

$$Q_R = \frac{2\pi \int_0^s \lambda_g dz}{\delta''_0 + \delta''_s}, \quad (22b)$$

$$Q_0 = \frac{\pi \int_0^s \lambda_g dz}{\int_0^s \alpha dz}, \quad (22c)$$

其中  $\lambda_g$  为波导波长.

在自由电子微波激射应用中, 除了空腔的谐振频率和品质因数外, 电场沿轴向的分布函数也是必须知道的. 对于远离临界截面的场, 可将(13)、(20)式代入(12)和(1)式, 即得某振荡模(磁波)电场:

$$E_{ik} = \frac{A}{\sqrt{\beta_k}} \sin \left( \int_0^z \beta_k dz - \frac{\delta_0}{2} \right) \mathbf{e}_k \quad (0 < z \leq z_1);$$

\* 这样做法是近似的, 当  $\int_0^s \alpha dz \ll 1$  时, 这是允许的.

$$\mathbf{E}_{ik} = \frac{A \sin\left(\int_0^{z_1} \beta_k dz - \frac{\delta_0}{2}\right)}{\sin\left(\int_{z_1}^s \beta_k dz - \frac{\delta_s}{2}\right)} \sin\left(\int_z^s \beta_k dz - \frac{\delta_s}{2}\right) \mathbf{e}_k, \quad (z_1 \leq z < s). \quad (23)$$

这样由(13)、(22)和(23)式,即可确定缓变截面波导腔的各种参数.

### 三

在这一节中将进一步研究缓变圆截面  $H_{0np}$  模开放腔.  $H_{0np}$  模是自由电子微波激光器中常用的工作模,因此研究它是有实用意义的.

$H_{0np}$  模在开放腔中振荡的必要条件是

$$ka_M > \mu_{0n} > ka_m \quad (24)$$

其中  $\mu_{0n}$  为  $J_0(x)$  函数的第  $n$  个根;  $a_M$  和  $a_m$  分别为腔体最大和最小半径;又  $k = 2\pi/\lambda$ .

如果腔只允许  $H_{0np}$  模有可能振荡(除兼并波外\*),还必须满足

$$\frac{\mu_{\nu+1}}{a_M} > k > \frac{\mu_{\nu-1}}{a_m} \quad (25)$$

$\mu_{\nu+1}$  和  $\mu_{\nu-1}$  为  $H_{0n}$  波最邻近前后两个波的相应贝塞尔函数的根. (24)和(25)式可合并成

$$\left. \begin{aligned} 1.0964 > \xi > 1, \quad 1 > \xi_0 > 0.7977 \text{ (对于 } H_{01} \text{ 波)}, \\ 1.0692 > \xi > 1, \quad 1 > \xi_0 > 0.9559 \text{ (对于 } H_{02} \text{ 波)}, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

其中

$$\xi = \frac{ka_M}{\mu_{0n}}, \quad \xi_0 = \frac{ka_m}{\mu_{0n}}. \quad (27)$$

开放腔中  $H_{0np}$  模的谐振频率和各  $Q$  值可按(13)和(22)式计算,其中

$$\beta_k(z) = k \sqrt{1 - \left(\frac{\mu_{0n}}{ka}\right)^2}, \quad (28)$$

$$\alpha(z) = \frac{R_s}{a} \frac{\left(\frac{\mu_{0n}}{ka}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mu_{0n}}{ka}\right)^2}}, \quad (29)$$

这里  $a$  是  $z$  的函数. (28)和(29)式是直圆波导的公式,在临界截面附近,由于是非理想导电壁,这两个公式应修正;但通常这一段仅占腔体长度的很小一部分,所以要在,例如金属归一化阻抗  $R_s \approx 10^{-4}$ ,  $a$  的变化使  $ka < 1.001\mu_{0n}$  时, (29)式才开始需要修正. 因此下面对  $\alpha$  的积分都是从临界截面开始.

现在着重考虑  $\delta_0$  或  $\delta_s$  的公式推导. 如图 2 所示, 左边是一个开放腔体, 通过一段长  $l$  的截止波导和一段过渡波导与输出波导相耦合. 现在就来研究这一耦合, 亦即确定腔

\* 与  $H_{0n}$  波兼并的  $E$  波在自由电子微波激光器中是不重要的, 因此通常不考虑其影响.

体一端的反射系数  $\rho_s$ 。

这一问题同样可从(5)、(6)式出发,求解  $V_k$  和  $I_k$  在临界截面附近的解。做法类似于文献[5]的办法,但那里是截止波导无限长,因此  $|\rho_s| = 1$ , 当  $l$  有限长时,  $|\rho_s| < 1$ , 亦即有一部分能量耦合到输出波导。

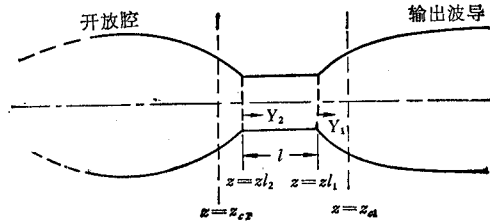


图 2 Fig. 2

将图 2 耦合部分分成三段, 截止波导为一段; 另两段是从截止波导到大波导的过渡段。每段中的场幅度分别满足(5)、(6)式, 在每段的交界处, 电磁场是连续的, 亦即归一化阻抗是一致的。

为了求反射系数  $\rho_s$ , 假定从耦合段左边有一投射波, 而认为输出波导右边是匹配的。

先研究包括  $z = z_{c1}$  临界截面的一段过渡波导, 在远离  $z = z_{c1}$  的右边, 由于没有反向波,  $V_k - I_k Z_k = 0$ , 利用(2a)式, 考虑到对于圆对称磁波  $T_{kk} = 0$ , 并同前面一样, 忽略波型间的耦合, 可得进出口处的边界条件

$$j\beta_k V_k + \frac{dV_k}{dz} = 0, \quad (30)$$

在紧靠临界截面  $z = z_{c1}$  处, (5)式可改写成<sup>[5]</sup>

$$\frac{d^2 V_k}{dt_1^2} + t_1 V_k = 0, \quad (31)$$

其中

$$t_1 = (z - z_{c1}) \left[ \frac{2k^2}{a_c} \operatorname{tg} \theta \right]^{1/3} = \left[ \frac{2\mu_{0n}^2}{\operatorname{tg}^2 \theta} \right]^{1/3} (1 - \xi_0), \quad (32)$$

式中  $a_c$  为工作频率下的临界截面半径,  $\theta$  为  $z = z_{c1}$  处纵剖面边界和  $z$  轴的夹角。由(32)式可知  $z > z_{c1}$  时,  $t_1$  为正值,  $t_1$  和  $\beta_k$  的关系为

$$\beta_k^2 = t_1 \left[ \frac{2k^2}{a_c} \operatorname{tg} \theta \right]^{2/3}.$$

(31)式的解就是 1/3 阶贝塞尔方程的解, 可利用现成的图表和结果<sup>[7]</sup>:

$$V_k = c_1 u(t_1) + c_2 v(t_1), \quad (33)$$

其中  $u(t_1)$ ,  $v(t_1)$  为 1/3 阶的贝塞尔-纽曼函数。当  $|t_1| \gg 1$  时, 它们的渐近式分别为<sup>[7]</sup>:

$$\begin{aligned} u(t_1) &= 2^{1/2} \cdot 3^{1/4} \cdot \pi^{-1/2} \cdot t_1^{-1/4} \cos\left(\frac{2}{3} t_1^{3/2} - \frac{5\pi}{12}\right), \\ v(t_1) &= 2^{1/2} \cdot 3^{1/4} \cdot \pi^{-1/2} \cdot t_1^{-1/4} \sin\left(\frac{2}{3} t_1^{3/2} - \frac{5\pi}{12}\right). \end{aligned} \quad (34)$$

(33) 式在  $t_1 \gg 1$  的情况下满足边界条件(30), 并利用渐近式, 可得

$$c_2 = -jc_1. \quad (35)$$

现在来求截止波导段右端  $z = z_{11}$  处归一化导纳  $Y_1$  (见图 2), 按 (16) 式,  $Y_1 = (1 - \rho)/(1 + \rho)$ , 其中  $\rho = A^-/A^+$ . 将 (15) 式代入得

$$\rho = \frac{j\beta_k V_k + \frac{dV_k}{dz}}{j\beta_k V_k - \frac{dV_k}{dz}}. \quad (36)$$

将 (33) 和 (35) 式代入 (36) 式, 即可求出

$$Y_1 = -\frac{h_2'(t_{11})}{h_2(t_{11})\sqrt{|t_{11}|}}, \quad (37)$$

这里  $h_2(t) = u(t) - jv(t)$  是 1/3 阶第二类汉格尔函数. 又

$$t_{11} = (z_{11} - z_c) \left[ \frac{2k^2}{a_c} \operatorname{tg} \theta \right]^{1/3} \quad (38)$$

为负值.  $Y_1$  的模和幅角随  $t_{11}$  的变化见图 3.

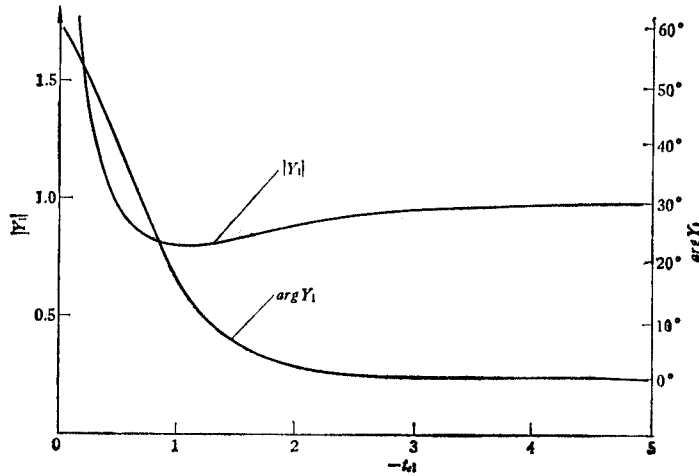


图 3 Fig. 3

$z = z_{12}$  处的归一化导纳  $Y_2$  极易从一般传输线理论推得

$$Y_2 = \frac{Y_1 + \operatorname{th} \frac{\mu_{0n} l}{a_m} \sqrt{1 - \xi_0^2}}{1 + Y_1 \operatorname{th} \frac{\mu_{0n} l}{a_m} \sqrt{1 - \xi_0^2}}. \quad (39)$$

为了由  $Y_2$  最后决定反射系数  $\rho_s$ , 需研究包含  $z = z_{c2}$  临界截面的一段过渡波导, 出发方程为:

$$\frac{d^2 V_k}{dt_2^2} - t_2 V_k = 0, \quad (40)$$

其中

$$t_2 = \left[ \frac{2\mu_{0n}^2}{\operatorname{tg}^2 \theta} \right]^{1/3} (1 - \xi_0), \quad (41)$$



$z < z_{c2}$  时,  $t_2$  为负值。

将(40)式与(31)式相比,可见第二项差一符号,因此查用文献[7]的图表时,也要有相应的符号变化。解(40)式的边界条件是,当

$$t_2 = t_{12} = (z_{12} - z_{c2}) \left[ \frac{2k^2}{a_c} \operatorname{tg} \theta \right]^{1/3}$$

时,归一化导纳  $Y_2$  由(39)式决定。

(40)式的解同样可写成(33)式,将(33)式代入(36)式,并利用  $Y$  与  $\rho$  的关系式和  $t_2 = t_{12}$  时  $Y = Y_2$  的边界条件,即得

$$\frac{c_2}{c_1} = - \frac{u(t_{12}) \sqrt{t_{12}} Y_2 + u'(t_{12})}{v(t_{12}) \sqrt{t_{12}} Y_2 + v'(t_{12})} \quad (42)$$

将(33)和(42)式代入(36)式,并令  $|t_2| \gg 1$ , 又利用  $u(t_2)$  和  $v(t_2)$  的渐近式(34),则得到  $z_{c2}$  左边远离临界截面处的反射系数

$$[\rho]_{|t_2| \gg 1} = - \frac{Y_2 h_1(t_{12}) \sqrt{t_{12}} + h_1'(t_{12})}{Y_2 h_2(t_{12}) \sqrt{t_{12}} + h_2'(t_{12})} e^{-i(\frac{4}{3})(-t_2)^{3/2} + i\frac{10}{12}\pi},$$

其中  $h_1(t) = h_2^*(t)$ , 是  $1/3$  阶第一类汉格尔函数。令  $t_2 = 0$ , 即得临界截面  $z_{c2}$  处的等效边界条件

$$\rho_s = - \frac{Y_2 h_1(t_{12}) \sqrt{t_{12}} + h_1'(t_{12})}{Y_2 h_2(t_{12}) \sqrt{t_{12}} + h_2'(t_{12})} e^{i\frac{5}{6}\pi} \quad (43)$$

这里在查文献[7]的图表时,由于自变量差一符号,因此查表时,应将  $t_{12}$  变符号;另外微商值  $h_1'(t_{12})$  和  $h_2'(t_{12})$  也应与表上的有一符号差。

由(28)、(29)和(43)式和(13)和(22)式即可确定缓变圆截面开放腔  $H_{n,op}$  模的振荡频率和  $Q$  值,下面将对双圆锥腔作具体计算。

#### 四

双圆锥开放腔如图4所示。取  $z$  坐标零点处于临界截面位置,因此左边第一个圆锥的半径  $a$  值变化为:

$$a = a_c + z \operatorname{tg} \theta_1, \quad (44)$$

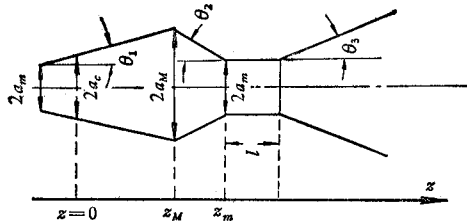


图4 Fig. 4

将(44)式代入(28)、(29)式,得  $H_{on}$  波在第一个圆锥的相位移和金属损耗:

$$\int_0^{z_M} \beta_k dz = \frac{\mu_{0n}}{\operatorname{tg} \theta_1} \left[ \frac{\beta_M a_M}{\mu_{0n}} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{\beta_M a_M}{\mu_{0n}} \right], \quad (45)$$

$$\int_0^{z_M} \alpha dz = \frac{R_s}{\operatorname{tg} \theta_1} \cdot \frac{\beta_M}{k}; \quad (46)$$

另外(22)式中还需要计算波导波长的积分:

$$\int_0^{z_M} \lambda_g dz = \frac{\lambda^2}{2\pi \operatorname{tg} \theta_1} \beta_M a_M, \quad (47)$$

其中,  $\beta_M = k \sqrt{1 - \left(\frac{\mu_{0n}}{k a_M}\right)^2}$ . 对于第二段圆锥, 其公式和上述一致, 仅将(45)–(47)式中  $\theta_1$  改为  $\theta_2$  即可. 将双圆锥波导中的总相移代入(13)式, 得

$$[\sqrt{\xi^2 - 1} - \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{\xi^2 - 1}] \frac{\mu_{0n} L}{\Delta a} = (2p - 1) \frac{\pi}{2}, \quad (48)$$

其中,  $\Delta a = a_M - a_m$ . 这里推导时, 由于是  $H_{0np}$  模,  $\Delta T_1 = 0$ ; 另外(13)式中  $\delta'_0$  和  $\delta'_s$  近似取为  $\pi/2$ , 这和实际情况相符, 因为作为自由电子微波激励器的振荡腔, 通常在工作频率下, 腔一端是深度截止, 另一端有一定程度截止, 即  $|\rho_0| = 1$  和  $|\rho_s| \simeq 1$ . 在这种情况下, 具体计算表明,  $\delta'_0$  和  $\delta'_s$  与  $\pi/2$  之差远小于 1, 因此可忽略不计.

(48)式中  $p = 1, 2, 3, \dots$  为  $H_{0np}$  模的纵向指标,  $\xi$  由(27)式决定, 与振荡频率成正比. 图 5 示出了  $\mu_{0n} L / \Delta a$  与  $\xi$  的关系曲线. 对于某一确定的尺寸和工作模式, 由图 5 即可确定腔基模谐振频率及其对最邻近模式 ( $p = 2$ ) 的选择性:

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{(\xi)_{p=2} - (\xi)_{p=1}}{(\xi)_{p=1}}. \quad (49)$$

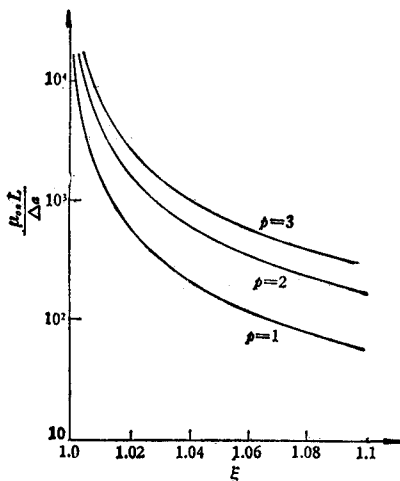


图 5 Fig. 5

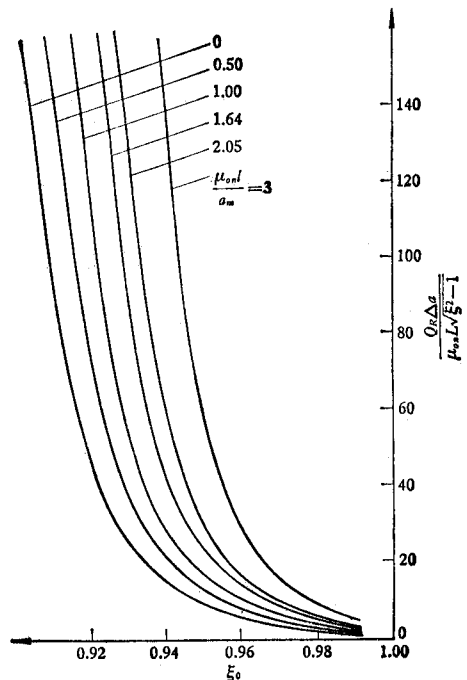


图 6 Fig. 6

从图 5 可知,  $\mu_{0n}L/\Delta a = \text{常数}$  的线将和一组不同  $p$  的曲线相交, 但高次  $H_{0np}$  模能否存在还须视其对应  $\xi$  值是否满足(26)式而定。

对非对称磁波,  $\Delta T_1 \approx 0$ , 因此它在开放腔中的谐振频率就须按(13)式计算, 但如果  $\text{tg } \theta_1 \ll 1$ ,  $\text{tg } \theta_2 \ll 1$  时, 则  $\theta$  角的不连续性可忽略, 所以仍然可采用(48)式和图 5 来决定非对称磁波的谐振频率。这样, 纵向指标相同 ( $p$  一致) 的非对称磁模与  $H_{0np}$  模谐振频率的相对频差(即选择性)为:

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{\mu_{0n} - \mu_p}{\mu_{0n}} \quad (50)$$

这表明  $\mu_p$  值最接近  $\mu_{0n}$  值的相应的非对称磁波的选择性最差。

将总衰减和波导波长的积分代入(22)式, 得

$$Q_0 = \frac{k a_M}{2R_s} \quad (51)$$

$$Q_R = \frac{\mu_{0n}L}{\Delta a} \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\delta_s'' + \delta_0''} \quad (52)$$

$\delta_s''$  可由(43)式决定, 对于深度截止的一端  $\delta_0'' = 0$ 。由(51)式可见, 由金属热损决定的圆对称磁模的无载品质因数与具体模式 ( $n$  和  $p$  值) 无关。

由(37)、(39)、(43)和(52)式计算出双圆锥形开放腔的  $Q_R$  值如图 6 所示, 其纵坐标为  $\frac{Q_R \Delta a}{\mu_{0n}L\sqrt{\xi^2 - 1}}$ , 横坐标为  $\xi_0$ 。作图时取

$$\left(2 \frac{\mu_{0n}^2}{\text{tg}^2 \theta_3}\right)^{1/3} = \left(2 \frac{\mu_{0n}^2}{\text{tg}^2 \theta_2}\right)^{1/3} = 14.17,$$

参变数  $\frac{\mu_{0n}l}{a_m}$  对应于不同的截止波导长度和半径, 是一个对  $Q_R$  很有影响的参数。

从图 5 和图 6 可知, 曲线比文献 [1] 给的要普遍得多, 可作为双圆锥开放腔的设计曲线。从曲线可看出  $\mu_{0n}L/\Delta a$  是设计时重要参量, 如取得太大, 则选择性变差, 且  $Q_R$  也变高,  $Q_R$  接近或超过  $Q_0$  值是不适宜的; 如取得过小,  $Q_R$  太低, 作为振荡腔有不易起振的缺点。

由(48)式或图 5 确定的  $H_{0np}$  的谐振频率与实测的符合得相当好, 相对差值一般在 0.2% 左右。例如实际尺寸的  $\frac{\mu_{02}L}{\Delta a} = 526.64$ , 由图 5 可得  $(\xi)_{p=1} = 1.022$ ,  $(\xi)_{p=2} = 1.045$ , 这与实际测得的  $H_{021}$ ,  $H_{022}$  谐振频率的相对差值分别为 -0.162% 和 -0.158%。由图 5 确定的选择性和实测值的差别更小, 已在测量误差之内。

在本项工作中赵兰英同志作了许多具体计算工作。在此表示感谢。

## 参 考 文 献

- [1] С. Н. Власов и др., ИВУЗ радиофизика, **12**(1969), 1236.
- [2] В. Е. Запелалов и др., радиотехника и электроника, **22**(1977), 1661.
- [3] 黄宏嘉, 微波原理(卷I), 科学出版社, 1963.
- [4] L. Solymar, Trans. IRE, **MTT-7** (1959), 379.
- [5] Б. З. Каценеленбаум, Теория нерегулярных волноводов, Изд. Академии Наук СССР, Москва (1961).

- [ 6 ] C. G. Montgomery, R. H. Dicke and E. M. Purcell *Principle of Microwave circuits, National Defense Research Committee*, 1948.
- [ 7 ] Л. Н. Осипова и Р. Д. Ведшкана, таблицы модифицированных функций ханкеля порядка  $1/3$  и их производных, вычислит. центр. (1965).

## THEORY OF WAVEGUIDE CAVITIES WITH SLOWLY VARYING CROSS-SECTION AND ITS APPLICATION

Qian Jing-ren

(*China University of Science and Technology*)

In this paper, from the generalized telegraph equations waveguide cavities with slowly varying cross-section are studied. The mode resonant frequencies and the quality factors (Q's) of these cavities and the field distributions are found when the boundary conditions at the ends and at discontinuities are given. H<sub>01p</sub> modes in an open circular waveguide cavity with slowly varying cross-section are studied in some details, especially the diffractive losses of these modes at the opened ends of the cavity are obtained.

Finally, two sets of universal curves for resonant frequencies and Q's are given for the double conic opened cavities which are most frequently used in practice. Some results of experiments prove their use rather reliable.