

图像插值方法对互信息局部极值的影响分析

杨 焯^① 裴继红^② 谢维信^①

^①(深圳大学信息工程学院 深圳 518060)

^②(深圳大学现代教育与信息中心 深圳 518060)

摘要 多模态图像配准中常使用互信息作为配准度量,互信息中的联合概率密度函数一般是利用图像灰度对的统计值来代替的,而图像插值可能产生新的灰度对,造成互信息出现局部极值。该文利用一维信号从理论上分析了线性 and 最近邻两种插值方法对互信息的影响。理论分析表明,线性插值造成互信息局部极值的可能性较小,而最近邻插值会使互信息出现周期性局部极值。试验结果证实了该文的结论。分析结果对基于互信息的多模态图像配准具有理论参考价值。

关键词 图像配准,互信息,图像插值

中图分类号: TN911.73

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2006)10-1782-04

Study on Local Maxima Problem of Mutual Information in Different Resolution Images Registration

Yang Xuan^① Pei Ji-hong^② Xie Wei-xin^①

^①(College of Information Engineering, Shenzhen University, Shenzhen 518060, China)

^②(Modern Education and Information Center of Shenzhen University, Shenzhen 518060, China)

Abstract Mutual information has been used as a similarity metric in medical image registration. The probabilities of mutual information may be estimated by normalization of the joint intensity histogram, which is obtained by binning the intensity pair of the overlapping parts of the reference image and the floating image. However, image interpolation would create new intensity pairs and may cause local maxima of mutual information. In this paper, local maxima of mutual information are analyzed using linear interpolation and near neighborhood interpolation for different resolution images. Analysis results show that mutual information contains less local maxima when linear interpolation is used, and contains local maxima when near neighborhood interpolation is used. Experiments show the validity of the results. All these results are benefit to multimodal medical image registration.

Key words Image registration, Mutual information, Image interpolation

1 引言

基于互信息(MI)的图像配准方法是日前多模医学图像配准方法研究的热点^[1-4],这类方法利用互信息来反映图像配准程度,互信息达到最大时对应的变换参数就是图像配准参数。图像在配准的过程中往往需要进行图像插值,而图像插值可能使互信息在随变换参数变化的过程中出现局部极值。许多文献都研究了不同插值方法对互信息局部极值的影响。Ji等^[5]分析了双线性、最近邻(NN)和部分体积插值法对互信息的影响,并提出了过采样和降低灰度分辨率等预处理方法来减少局部极值问题;Pluim等^[6]指出图像重新采样将影响互信息变化的平滑度,并指出部分体插值会增加互信息的局部极值,而线性插值可以减小互信息局部极值出现的可能性;Tsao^[7]利用实验刻画了8种插值算法对互信息局部极值的影响。这些文献都是利用大量试验结果来说明结论,没有给出理论证明。本文针对图像插值中最常用的线性插值和最近邻

插值,利用一维信号从理论上分析了这两种插值方法对不同分辨率图像互信息的影响。分析结果表明,线性插值造成互信息局部极值的可能性较小,而最近邻插值会使互信息出现周期性局部极值。本文分析结果证明了以往文献得出的试验性结论,对基于互信息的多模图像配准具有理论参考价值,可以通过进行有效的图像插值以减少互信息产生局部极值。

2 互信息

互信息的概念是源于信息论中关于随机变量中相互包含的信息量的定义,可以表达两图像之间信息相互包含的程度。互信息的定义为

$$I(X,Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y) \quad (1)$$

$$H(X,Y) = -\sum_{x,y} P(x,y) \log P(x,y) \quad (2)$$

其中 $H(X,Y)$ 是两个图像的联合熵,由两个图像的联合概率密度函数 $P(x,y)$ 决定, $H(X)$ 和 $H(Y)$ 由 $P(x,y)$ 的边缘概率密度函数 $P(x)$ 和 $P(y)$ 决定。互信息的核心是联合概率密度函数 $P(x,y)$,Viola和Wells^[3]以及Collignon^[4]利用图像灰度的联合直方图的统计信息作为联合概率密度函数。当图像

进行插值后, 会产生新的灰度对, 或原有的灰度对消失, 使灰度对在整图中占的比例发生变化, 从而联合概率密度函数 $P(x, y)$ 发生变化, 便有可能产生局部极值。下面我们针对最常用的两种插值方法: 线性插值、最近邻插值, 分析插值方法对互信息的影响。在图像插值的情况下, 互信息随旋转参数的变化出现局部极值的可能性相对较小, 本文仅以水平平移为例, 利用两个一维离散信号, 分析其互信息随平移参数的变化情况。这些结论都可以扩展到二维图像中。

3 线性插值方法对互信息的影响

3.1 相同分辨率信号

我们利用两个斜坡边缘 X 和 Y 进行分析。两个斜坡边缘的斜坡宽度相同, 表示相同分辨率的两个信号。线性插值方法在信号的斜坡边缘中相邻的两个采样点之间按线性关系产生若干强度不同的新采样点。假设信号长度为 N , 边缘宽度为 M 。两个信号的边缘中心是配准位置, 将线性插值后的信号 Y 自配准位置相对信号 X 平移 $x, x \leq M$ 。为了分析简单, 我们假设信号 Y 两端延拓后再平移, 然后在信号 X 的有效范围内计算两个信号的互信息, 以后的推导都基于这个假设。

$$H(X) = -\frac{M}{N} \log \frac{1}{N} - \frac{N-M}{N} \log \frac{N-M}{2N} \quad (3)$$

$$H(Y) = -\frac{N-M+2x}{2N} \log \frac{N-M+2x}{2N} - \frac{N-M-2x}{2N} \log \frac{N-M-2x}{2N} - \frac{M}{N} \log \frac{1}{N} \quad (4)$$

$$H(X, Y) = -\frac{M+x}{N} \log \frac{1}{N} - \frac{N-M}{2N} \log \frac{N-M}{2N} - \frac{N-M-2x}{2N} \log \frac{N-M-2x}{2N} \quad (5)$$

$$I(X, Y) = -\frac{M-x}{N} \log \frac{1}{N} - \frac{N-M}{2N} \log \frac{N-M}{2N} - \frac{N-M+2x}{2N} \log \frac{N-M+2x}{2N} \quad (6)$$

对互信息 $I(X, Y)$ 求导数, 忽略常数的影响, 则

$$\frac{dI(X, Y)}{dx} = \frac{1}{N} \ln \frac{2}{N-M+2x} - \frac{1}{N} \quad (7)$$

一般情况下可以满足 $N-M+2x > 2$, 则 $\frac{dI(X, Y)}{dx} < 0$ 。这表明, 当两个分辨率相同的信号经过线性插值后, 互信息随平移参数的增大单调减小, 出现局部极值问题的可能性较小。

3.2 不同分辨率信号

我们以两个斜坡宽度不同的斜坡边缘表示不同分辨率的信号, X 表示低分辨率信号, 其斜坡宽度大, Y 表示高分辨率信号, 斜坡宽度窄。假设两个信号长度都是 N , X 的边缘宽度为 M_1 , Y 的边缘宽度为 M_2 。信号 Y 自配准位置相对

信号 X 平移 x , 且 $x \leq (M_2 - M_1)/2$ 。

$$H(X) = -\frac{M_1}{N} \log \frac{1}{N} - \frac{N-M_1}{N} \log \frac{N-M_1}{2N} \quad (8)$$

$$H(Y) = -\frac{N-M_2+2x}{2N} \log \frac{N-M_2+2x}{2N} - \frac{N-M_2-2x}{2N} \log \frac{N-M_2-2x}{2N} - \frac{M_2}{N} \log \frac{1}{N} \quad (9)$$

$$H(X, Y) = H(X) \quad (10)$$

$$I(X, Y) = -\frac{N-M_2+2x}{2N} \log \frac{N-M_2+2x}{2N} - \frac{N-M_2-2x}{2N} \log \frac{N-M_2-2x}{2N} - \frac{M_2}{N} \log \frac{1}{N} \quad (11)$$

不考虑常数影响, $\frac{dI(X, Y)}{dx} = -\frac{1}{N} \ln \frac{N-M_2+2x}{N-M_2-2x} < 0$, 这表

明信号经过线性插值后互信息单调递减, 发生局部极值的可能性较小。综合相同分辨率信号和不同分辨率信号的分析, 我们的结论是不论原始信号的分辨率如何, 线性插值使互信息出现局部极值的可能性都较小。

4 最近邻插值方法对互信息的影响

4.1 相同分辨率信号

信号经过最近邻插值, 一个采样点将扩展为强度相同的几个采样点。对于斜坡边缘, 经过最近邻插值后, 斜坡中的每个点变为一个宽台阶, 一个台阶的宽度相当于 K 个采样点, K 的大小由插值的倍数决定。这样每个边缘由强度不同的宽台阶组成。我们用两个相同的这种宽台阶信号表示经过最近邻插值后的相同分辨率信号。假设信号长度为 N , 边缘中台阶的个数为 M , 每个台阶的宽度为 K 。信号 Y 自配准位置相对信号 X 平移 $x, x \leq K$ 。

$$H(X) = -\frac{N-KM}{N} \log \frac{N-KM}{2N} - \frac{KM}{N} \log \frac{K}{2N} \quad (12)$$

$$H(Y) = -\frac{N-KM+2x}{2N} \log \frac{N-KM+2x}{2N} - \frac{N-KM-2x}{2N} \log \frac{N-KM-2x}{2N} - \frac{KM}{N} \log \frac{K}{N} \quad (13)$$

$$H(X, Y) = -\frac{N-KM}{2N} \log \frac{N-KM}{2N} - \frac{(M+1)x}{N} \log \frac{x}{N} - \frac{KM-xM}{N} \log \frac{K-x}{N} - \frac{N-KM-2x}{2N} \log \frac{N-KM-2x}{2N} \quad (14)$$

$$I(X, Y) = -\frac{2KM}{N} \log \frac{K}{N} - \frac{N-KM+2x}{2N} \log \frac{N-KM+2x}{2N} + \frac{(M+1)x}{N} \log \frac{x}{N} + \frac{KM-xM}{N} \log \frac{K-x}{N} \quad (15)$$

不考虑常数的影响, 且假设 $KM \ll N$ (一般情况都满足), 则

$$\begin{aligned} \frac{dI(X,Y)}{dx} &= -\frac{1}{N} \ln \frac{N-KM+2x}{2N} + \frac{M}{N} \ln \frac{x}{K-x} \\ &\approx -\frac{1}{N} \ln \frac{1}{2} + \frac{M}{N} \ln \frac{x}{K-x} \end{aligned} \quad (16)$$

可以推出, 当 $x < \frac{CK}{C+1}$, $C = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $\frac{dI(X,Y)}{dx} < 0$, 反之

$\frac{dI(X,Y)}{dx} > 0$ 。当 M 较大时(一般情况都满足), $C \approx 1$, 即当

$x < \frac{K}{2}$ 时, $\frac{dI(X,Y)}{dx} < 0$; 当 $x > \frac{K}{2}$ 时, $\frac{dI(X,Y)}{dx} > 0$ 。也就

是说, 利用最近邻进行插值时, 互信息在 $x \approx K/2$ 处存在局部最小。如果平移出现在下一个台阶中, 上述结论同样适用, 所以这种局部最小是周期出现的。

4.2 不同分辨率信号

我们用宽台阶表示低分辨率信号的插值结果, 用窄台阶表示高分辨率信号的插值结果。假设 X 是低分辨率信号, 其边缘由几个强度不同的宽台阶组成。 Y 是高分辨信号, 其边缘由几个强度不同的窄台阶组成。不失一般性地, 假设一个窄台阶就是一个采样点, 信号 X 的台阶宽度是信号 Y 的台阶宽度的整数 K 倍, 信号 X 的边缘中台阶个数为 M_1 , 信号 Y 中的边缘台阶个数为 M_2 , 两个信号的长度都是 N 。为了简化分析, 假设信号 Y 的边缘宽度恰好为信号 X 的一个台阶宽, 即 $M_2 = K$ 。信号 Y 相对信号 X 平移 x , 且 $x < K$, 即平移发生在一个宽台阶范围内。

$$H(X) = -\frac{N-KM_1}{N} \log \frac{N-KM_1}{2N} - \frac{KM_1}{N} \log \frac{K}{N} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} H(Y) &= -\frac{N-M_2+2x}{2N} \log \frac{N-M_2+2x}{2N} \\ &\quad - \frac{N-M_2-2x}{2N} \log \frac{N-M_2-2x}{2N} - \frac{M_2}{N} \log \frac{1}{N} \end{aligned} \quad (18)$$

$$H(X,Y) = -\frac{N-KM_1}{N} \log \frac{N-KM_1}{2N} - \frac{K(M_1-2)}{N} \log \frac{K}{N}$$

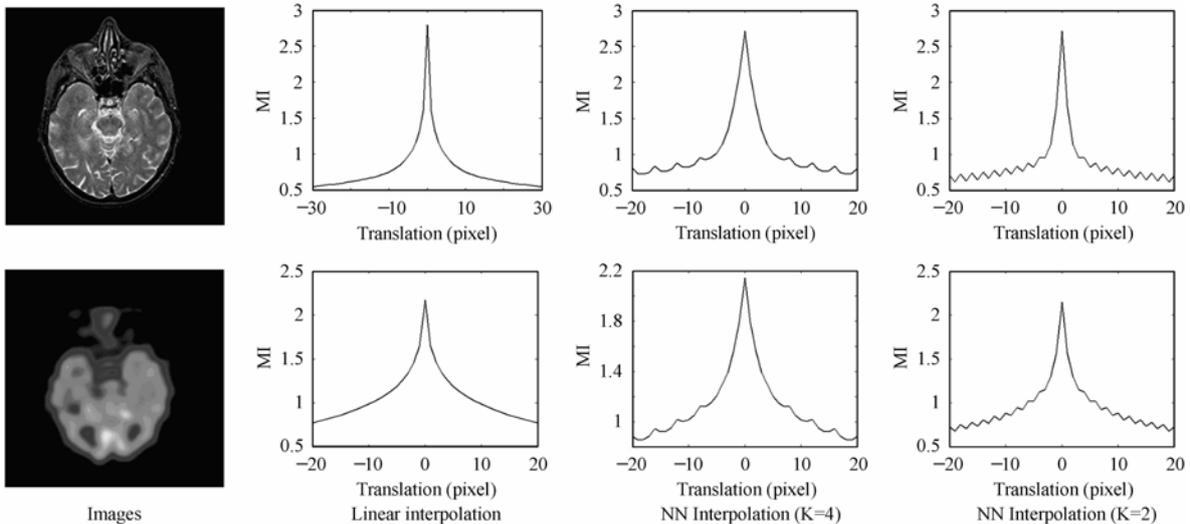


图1 相同分辨率图像插值后互信息的变化情况

Fig.1 Response of mutual information to horizon translation using images with same resolutions

$$-\frac{x}{N} \log \frac{x}{N} - \frac{K-x}{N} \log \frac{K-x}{N} - \frac{M_2}{N} \log \frac{1}{N} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} I(X,Y) &= -\frac{N-KM_1}{2N} \log \frac{N-KM_1}{2N} - \frac{2K}{N} \log \frac{K}{N} \\ &\quad - \frac{N-M_2+2x}{2N} \log \frac{N-M_2+2x}{2N} - \frac{N-M_2-2x}{2N} \\ &\quad \cdot \log \frac{N-M_2-2x}{2N} + \frac{x}{N} \log \frac{x}{N} + \frac{K-x}{N} \log \frac{K-x}{N} \end{aligned} \quad (20)$$

不考虑常数的影响, 且满足 $x \ll N - M_2$, 则

$$\frac{dI(X,Y)}{dx} = -\frac{1}{N} \ln \frac{N-M_2+2x}{N-M_2-2x} + \frac{1}{N} \ln \frac{x}{K-x} \approx \frac{1}{N} \ln \frac{x}{K-x} \quad (21)$$

当 $x < K/2$ 时, $\frac{dI(X,Y)}{dx} < 0$; 当 $x > K/2$ 时, $\frac{dI(X,Y)}{dx} > 0$ 。

这表明当 $x < K$ 时, 局部极值出现在宽台阶的中间 $x \approx K/2$ 处, 并且在每一个因最近邻插值而产生的宽台阶中都会出现这种现象, 因此这种局部极值是周期出现的。

综合最近邻插值方法对相同分辨率和不同分辨率信号的分析, 我们的结论是不论图像分辨率的差异, 最近邻插值总是会引起互信息出现周期性局部极值。

5 试验结果

我们选取不同类型的图像, 对这些图像进行插值后, 计算插值图像自己与自己的互信息随平移的变化情况, 以验证相同分辨率图像经过插值后互信息的变化。图1中第1列是原始图像; 第2列是原始图像经过线性插值后, 插值图像自己与自己的互信息变化情况, 第3列是原始图像经过最近邻插值后($K=4$), 互信息随平移参数的变化情况, 第4列是原始图像经过最近邻插值后($K=2$), 互信息随平移参数的变化情况。可以看出线性插值没有出现局部极值; 而最近邻插值出现了周期性的局部极值, 同时局部极值出现的位置与最近邻插值大小 K 有关, K 越大, 局部极值出现的频率越低。这些试验结果与我们的分析是一致的。

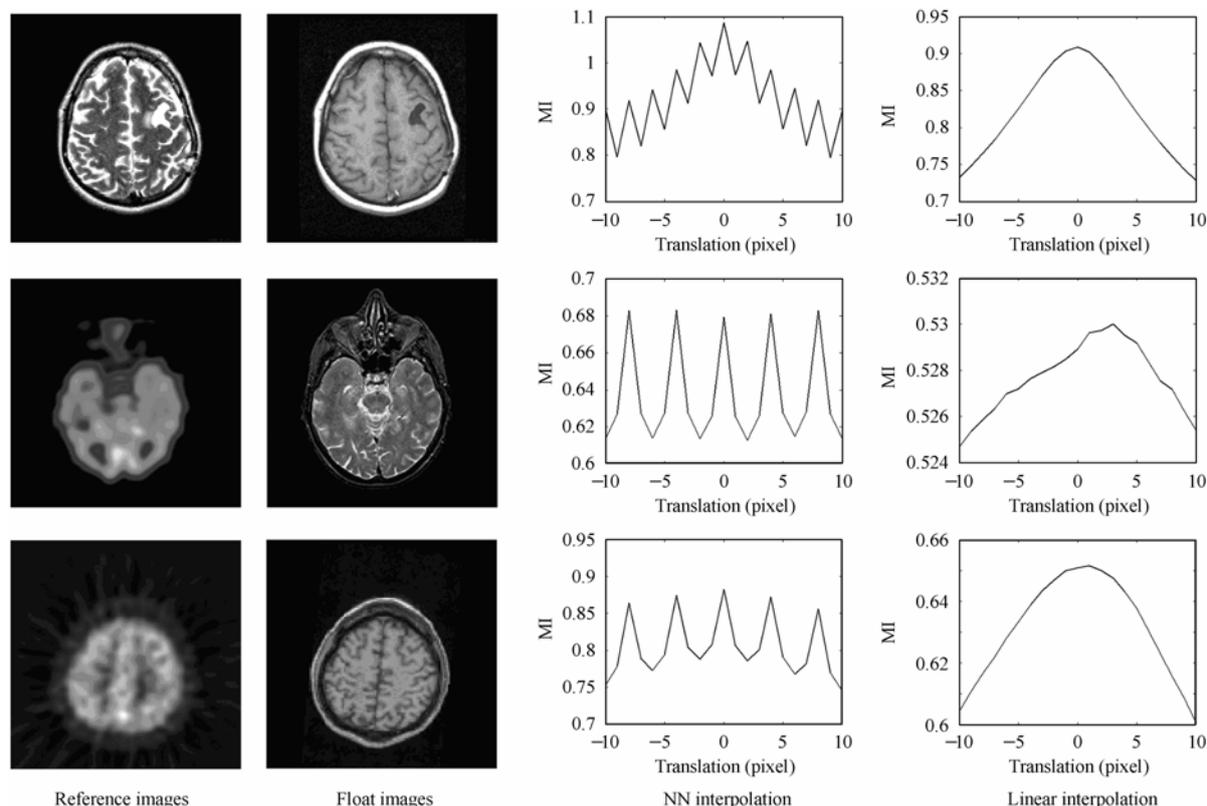


图 2 不同分辨率图像插值后的互信息变化趋势

Fig.2 Response of mutual information to horizon translation using images with different resolutions

我们选用不同分辨率的多模态图像对,对图像对进行插值后,计算不同分辨率图像插值后的互信息随平移参数的变化情况。我们以第 1 列插值图像为参考图像,平移第 2 列插值图像。图 2 中第 3 列是最近邻插值后互信息的变化情况,第 4 列是线性插值后互信息的变化情况。可以看出,线性插值出现局部极值很少,而最近邻插值会造成周期性的局部极值。实验结果与我们的结论基本一致。

6 结束语

在多模态图像配准中,基于互信息的图像配准方法是一种自动配准的方法,该方法对于互信息具有很强的依赖性,而图像插值可能使互信息的变化出现局部极值。本文利用一维信号模型,从理论上分析了不同插值方法使互信息出现局部极值的情况。理论分析表明线性插值造成互信息局部极值的可能性较小;而最近邻插值会造成互信息出现周期性局部极值。这些结论与已有文献的结论是一致的,本文从理论上证明了这些结论的正确性。本文结论对于基于互信息的图像配准方法的研究具有理论参考价值。

参 考 文 献

[1] Pluim J P W, Maintz J B A, Viergever Max A. Mutual-information-based registration of medical images: A Survey. *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 2003, 22(8): 986-1004.
 [2] Pluim J P W, Maintz J B A, Viergever M A. Image registration by maximization of combined mutual information and gradient

information. *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 2000, 19(8): 809-814.
 [3] Viola P, Wells W M. III. Alignment by maximization of mutual information. the 5th International Conference on Computer Vision, Cambridge, MA, 1995: 16-23.
 [4] Collignon A, Maes F, Delaere D, Vandermeulen D, et al.. Automated Multi-modality Image Registration Based on Information Theory: Information Processing in Medical Imaging, Dordrecht, Kluwer Academic, 1995: 263-274.
 [5] Ji Jim Xiuquan, Pan Hao, Liang Zhi-Pei. Further analysis of interpolation effects in mutual information-based image registration. *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 2003, 22(9): 1131-1140.
 [6] Pluim J P W, Maintz J B A, Viergever M A. Interpolation artifacts in mutual information based image registration. *Computer Vision and Image Understanding*, 2000, 77(2): 211-232.
 [7] Tsao J. Interpolation artifacts in multimodality image registration based on maximization of mutual information. *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 2003, 22: 854-864.

杨 焜: 女, 1969 年生, 教授, 研究方向为图像融合、图像配准等。
 裴继红: 男, 1966 年生, 教授, 研究方向为模式识别、图像处理等。
 谢维信: 男, 1941 年生, 教授, 研究方向为模糊信息处理、目标检测等。