第11卷 第2期　　电子科学学刊　　Vol. 11, No. 2
1989年3月　　JOURNAL OF ELECTRONICS　　Mar., 1989

非线性电路和系统的灵敏度分析——非线性传递函数法*

焦李成
(中国民航学院，天津)

摘要　本文研究了非线性传递函数的性质，提出了 n 阶稳定性、n 阶零极点，n 阶频率响应、n 阶零灵敏度等新概念和非线性系统灵敏度分析的新理论和方法.

关键词　电路与系统；非线性传递函数；灵敏度

一、引　言

在线性系统理论中人们广泛使用拉氏变换来对系统进行频域分析和复域分析，它把复杂的积分、微分方程变换为简单的代数方程. 在频域分析中得到了从时域分析中难以认识的零、极点分布、频率响应等概念的物理意义. 然而，拉氏变换是一种线性算子. 对非线性系统是不适用的. Volterra 泛函级数理论[1-6]使得我们也能象线性系统一样，对非线性系统进行频域分析. 非线性传递函数理论把非线性系统的分析转化为线性系统的 n 次分析. 这种转化是完全精确化的，与通常的"线性化"处理有着本质的区别. 所用的多重频域分析的手段是线性系统理论频域分析的直接推广. 因此，它为非线性系统的分析提供了一种新的理论.

对于非线性系统传递函数的求解以及把 Volterra 级数用于非线性系统的分析，诸如振荡分析、噪声分析，已经取得了许多成果[1-6]. 然而，关于非线性传递函数的物理性质和把它用于非线性系统的灵敏度分析，还没有任何结果.

基于非线性传递函数理论，本文首先研究了非线性电路和系统的网络函数的物理性质，提出了非线性电路和系统传递函数的零、极点、频率响应、稳定性等新概念及其物理意义. 接着提出了非线性系统灵敏度分析的非线性传递函数理论及符号分析法.

二、非线性网络函数

对于线性系统来说(包括集中参数与分布参数)，系统对冲激函数 $\delta(t)$ 激励都有确定的、唯一的响应 $h_1(t)$，而系统对任意输入 $x(t)$ 的响应完全由下式确定:

* 1987年3月24日收到，1987年6月25日修改定稿.

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} h_1(\tau)x(t-\tau)d\tau \tag{1}$$

写成频域形式则有:

$$y(s)=H_1(s)X(s) \tag{2}$$

对任一解析的非线性系统 N, 其 I/O 关系可用 Volterra 泛函级数表示,

$$y(t)=\sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \tag{3}$$

其中

$$y_n(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n)$$

$$\cdot\prod_{i=1}^{n} x(t-\tau_i)d\tau_1 d\tau_2\cdots d\tau_n \tag{4}$$

式中 $h_n(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n)$ 为非线性系统的 n 阶 Volterra 核,称之为 n 阶脉冲响应. 由(3)和(4)式可见,与线性系统不同,一非线性系统由 Volterra 核集合:$\{h_1(\tau_1),h_2(\tau_1,\tau_2),\cdots,h_n(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n)\}$ 来描写.

把(4)式写成频域形式,则有

$$Y_n(s_1,s_2,\cdots,s_n)=H_n(s_1,s_2,\cdots,s_n)\cdot\prod_{i=1}^{n} X(s_i) \tag{5}$$

式中 $Y_n(s_1,s_2,\cdots,s_n)$ 称为系统的 n 阶输出变换. $H_n(s_1,s_2,\cdots,s_n)$ 为系统 n 阶脉冲响应的多重拉氏变换,称为非线性系统的 n 阶非线性传递函数(或统称 n 阶网络函数).一非线性系统可由网络函数集合 $\{H_1(s_1),H_2(s_1,s_2),\cdots,H_n(s_1,s_2,\cdots,s_n)\}$ 描写.

1. Volterra 核的性质

性质 1 收敛性

若对任一输入信号 $|x(t)|<R_0$(R_0 为一实常数),且有

$$\|h_n\|:=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}|h_n(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n)|d\tau_1 d\tau_2\cdots d\tau_n<\infty \tag{6}$$

则(4)式收敛.

证明 由(4)式有

$$|y_n(t)|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1,\cdots,\tau_n)\cdot\prod_{i=1}^{n} x(t-\tau_i)d\tau_i\right|$$

$$\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}|h_n(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n)|\cdot\left\{\prod_{i=1}^{n}|x(t-\tau_i)|d\tau_i\right\}$$

$$\leqslant (\max|x(t)|)^n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \cdot |h_n(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n)| d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_n$$

$$= \|h_n\| \cdot (\max|x(t)|)^n < \infty \tag{7}$$

即(4)式收敛.

性质 2　对称性

定义

$$\overline{h_n(t_1, t_2, \cdots, t_n)} := \sum_{\substack{(t_1, t_2, \cdots, t_n) \\ \text{的所有排列}}} h_n(t_1, \cdots, t_n) \tag{8}$$

则对称化核 $\overline{h_n(\cdot)}$ 的响应与每一 $h_n(\cdot)$ 给出的响应相同.

性质 3　齐次性

若系统的输入 $x(t)$ 增加 α 倍(α 为一实常数),则系统的 n 阶响应

$$y_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n) \cdot \prod_{i=1}^{n} \alpha x(t-\tau_i) d\tau_i$$

$$= \alpha^n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n) \cdot \left\{\prod_{i=1}^{n} x(t-\tau_i) d\tau_i\right\} \tag{9}$$

即系统的 n 阶响应增加 α^n 倍,这也反映了非线性特性.

性质 4　因果性

对于任何实际物理系统有

$$h_n(t_1, t_2, \cdots, t_n) = 0 \quad \forall t_i < 0,\ i = 1, \cdots, n \tag{10}$$

2. 非线性传递函数

性质 1　对称性

对非线性对称传递函数 $H_n(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ 有

$$H_n(s_1, s_2, \cdots, s_n) \approx H_n(s_1, s_2, \cdots, s_n)|s_1, \cdots, s_n \tag{11}$$

的任意排列

性质 2　n 阶稳定性

对非线性传递函数 $H_n(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ 当且仅当它对每一变量 $s_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 为稳定时,才是稳定的.

性质 3　微分性质

对图 1 所示非线性系统有

$$H_n(s_1, s_2, \cdots, s_n) \approx (s_1 + s_2 + \cdots + s_n) G_n(s_1, s_2, \cdots, s_n) \tag{12}$$

性质 4　积分性质

对图 2 所示非线性系统,有

$$H_n(s_1, s_2, \cdots, s_n) \approx \frac{1}{s_1, s_2 \cdots s_n} \cdot G_n(s_1, s_2, \cdots, s_n) \tag{13}$$

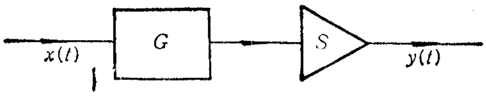

图 1　微分系统

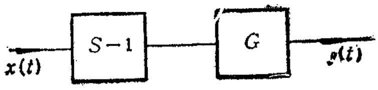

图 2　积分系统

性质 5　逆系统性质

一系统与其逆系统级联后给出一单位系统

$$F * F^{-1} = F^{-1} * F = I \tag{14}$$

用非线性传递函数表示则有

$$H_1(s_1) = F_1(s) \cdot F_1^{-1}(s) = 1$$
$$H_n(s_1, s_2, \cdots, s_n) \approx 0 \quad \forall n > 1 \tag{15}$$

性质 6　因果性

对任一实际物理系统，当 $t < 0$ 时，有

$$H_n(s_1, s_2, \cdots, s_n) \approx 0 \quad \forall n \tag{16}$$

定义 1　非线性传递函数 $H_n(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ 可以表示为一多复变量有理函数

$$H_n(s_1, s_2, \cdots, s_n) \approx \frac{N_n(s_1, s_2, \cdots, s_n)}{D_n(s_1, s_2, \cdots, s_n)} \tag{17}$$

定义 $N_n(s_1, s_2, \cdots, s_n)=0$ 的根为 $H_n(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ 的 n 阶零点；$D_n(s_1, s_2, \cdots, s_n)=0$ 的根定义为 $H_n(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ 的 n 阶极点。

性质 7　任一非线性传递函数 $H_n(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ 的零极点，同时也是任一非线性传递函数 $H_i(s_1, s_2, \cdots s_i)$ 的零、极点 $(i \leqslant n)$。

性质 8　对任一 n 阶传递函数 $H_n(s_1, s_2, \cdots, s_n)$，若其全部 n 阶零、极点位于复平面的左半平面，则它是稳定的。

3. 非线性系统的 n 阶频率响应

设系统输入为

$$x(t) = \sum_{i=1}^{M} A_i e^{j\omega_i t} \tag{18}$$

则其 n 阶输出

$$y_n(t) = \sum_{i_1=1}^{M}\sum_{i_2=1}^{M}\cdots\sum_{i_n=1}^{M}\left\{\left(\prod_{k=1}^{n} A_k\right)\cdot \exp\left[j\left(\sum_{k=1}^{n}\omega_{i_k} t\right)\right]\right.$$
$$\left.\cdot H_n(j\omega_{i_1}, j\omega_{i_2}, \cdots, j\omega_{i_n})\right\} \tag{19}$$

可见它与 $H_n(\cdot)$及输入幅值 A_{ik} 都有关，它和前面给出的齐次性(它不满足迭加性)一起反映了非线性系统的本质。

引理 1　设有

$$H_n(j\omega k_1, \cdots, j\omega k_n) = O\left(\frac{1}{k_1\cdots k_n}\right) \tag{20}$$

则

$$\left(\sum_{k_1+\cdots+k_n=m} \hat{x}(k_1)\cdots\hat{x}(k_n) H_n(j\omega k_1, \cdots, j\omega k_n)\right) \tag{21}$$

绝对收敛．（$\hat{x}(k_i)$ 为 $x(k_i)$ 的幅值）．

证明　设

$$H_n(j\omega k_1, \cdots, j\omega k_n) = O\left(\frac{1}{k_1\cdots k_n}\right)$$

则当

$$H_n(j\omega k_1, \cdots, j\omega k_n)|_{k_i\in N} \in l^2(N^n) \tag{22}$$

因 $\hat{x}\in l^2$, $[\hat{x}(k_1), \cdots, \hat{x}(k_n)]_{k_i\in N}\in l^2(N^n)$ 具范数 $\|\hat{x}\|_2^n$ 使

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k_1+\cdots+k_n=m}\right)&|\hat{x}(k_1)\cdots\hat{x}(k_n)H_n(j\omega k_1, \cdots, j\omega k_n)|\\ &\leqslant \sum_{k_1,\cdots,k_n}|\hat{x}(k_1)\cdots\hat{x}(k_n)H_n(j\omega k_1, \cdots, j\omega k_n)|\\ &\leqslant \|\hat{x}(k_1)\cdots\hat{x}(k_n)\|_2\|H_n(j\omega k_1, \cdots, j\omega k_n)\|_2\\ &= \|\hat{x}\|_2^n\|H_n(j\omega k_1, \cdots, j\omega k_n)\|_2\end{aligned} \tag{23}$$

引理 1 证毕．

定理 1　设 $\|x\| < \rho$，且(1)输入 x 在其定义区间上作有界变换或 (2) 算子 N 是严格真的，即

$$H_n(j\omega k_1, \cdots, j\omega k_n) = O\left(\frac{1}{k_1\cdots k_n}\right) \tag{24}$$

则系统输出

$$\hat{Y}(m) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k_1+\cdots+k_n=m}\right)\cdot\prod_{i=1}^{n}\hat{x}(k_i)\cdot H_n(j\omega k_1, \cdots, j\omega k_n) \tag{25}$$

有界．

证明　利用引理 1 即可证之．

定理 1 反映了非线性系统的频率响应的性质和非线性传递函数法的正确性．

三、非线性系统灵敏度分析

由于元件容差的存在，系统灵敏度分析的重要性无论怎样强调也不会过分．尤其是对容差分析、电网络最坏情况分析、自动设计与优化设计、故障诊断等，灵敏度分析必不可少．而已有的方法大都只适用于线性网络和系统．在下面讨论中，我们给出非线性灵敏度分析的一种全新的理论．

定义 1　非线性系统的灵敏度

设 $f(s, x)$ 为非线性系统的特征函数，则它对参数 x 的灵敏度定义为

$$NS_x^{f(s,x)} \triangleq \frac{\partial f(s, x)/f(s, x)}{\partial x/x} = \frac{x}{f(s, x)}\cdot\frac{\partial f(s, x)}{\partial x} \tag{26}$$

上式进一步可写为

$$NS_x^{f(s,x)}=\frac{\partial \ln f(s,x)}{\partial \ln x} \tag{27}$$

或

$$\frac{\partial f}{f}=NS_x^f\cdot\frac{\partial x}{x} \tag{28}$$

(28)式表明了 NS_x^f 的物理意义.

由上节讨论可知，非线性系统可由非线性传递函数集合 $\{H_1(s_1), H_2(s_1, s_2), \cdots, H_n(s_1, \cdots, s_n)\}$ 来描述,则有

定义 2 非线性系统的 n 阶灵敏度

若 $H_n(s_1, s_2, \cdots, s_n, x)$为非线性系统的 n 阶传递函数,则定义它对系统参数 x 的灵敏度为系统的 n 阶灵敏度

$$^{(n)}NS_x^{H_n(\cdot)}\triangleq\frac{x}{H_n(\cdot)}\cdot\frac{\partial H_n(\cdot)}{\partial x}=\frac{\partial \ln H_n(\cdot)}{\partial \ln x} \tag{29}$$

推论 1 当 $n=1$ 时, n 阶非线性灵敏度 $^{(n)}NS_x^{H_n(\cdot)}$ 即就是通常的线性灵敏度.

推论 2 由传递函数 $H_n(\cdot)$ 可知，非线性系统的灵敏度可由集合 $\{^{(1)}NS_x^{H_1(\cdot)}, {}^{(2)}NS_x^{H_2(\cdot)}, \cdots, {}^{(n)}NS_x^{H_n(\cdot)}\}$ 完整地描述.

定义 3 非线性系统的 n 阶传递函数的 i 阶零灵敏度定义为

$$^{(n)}_{(i)}NS_x^{H_n(\cdot)}\triangleq\left.\frac{\partial^i \ln H_n(\cdot)}{\partial^i \ln x}\right|_{x=0}=0 \tag{30}$$

推论 3 当 $n=1, i=1$ 时，非线性传递函数的零灵敏度即为通常的线性传递函数的一阶零灵敏度;当 $n=1$ 时,(30)式则是通常的线性传递函数的 i 阶零灵敏度.

当输入为 n 个正弦信号时,典型的非线性传递函数为

$$H_n(j\omega_1, j\omega_2, \cdots, j\omega_n)=|H_n(\cdot)|e^{j\varphi_n(\cdot)} \tag{31}$$

当只有单个正弦输入信号时,上式退化为

$$H_n(j\omega, j\omega, \cdots, j\omega)\triangleq\hat{H}_n(j\omega) \tag{32}$$

(31)、(32)式反映了系统的非线性频率响应特性,此时,非线性 n 阶灵敏度可写为

$$\begin{aligned}^{(n)}NS_x^{H_n(\cdot)}&=\frac{\partial \ln \hat{H}_n(j\omega)}{\partial \ln x}\\&=\frac{\partial \ln|\hat{H}_n(j\omega)|}{\partial \ln x}+j\frac{\partial \varphi_n(\omega)}{\partial x}\end{aligned} \tag{33}$$

定义 4 n 阶非线性幅值灵敏度可定义为

$$^{(n)}NS_x^{|H_n(\cdot)|}\triangleq\frac{x}{|\hat{H}_n(j\omega)|}\cdot\frac{\partial|\hat{H}_n(j\omega)|}{\partial x} \tag{34}$$

推论 4 非线性系统的幅值灵敏度可由集合 $\{^{(1)}NS_x^{|H_1(\cdot)|}, {}^{(2)}NS_x^{|H_2(\cdot)|}, \cdots, {}^{(n)}NS_x^{|H_n(\cdot)|}\}$ 完整地描述.

定义 5 n 阶非线性相位灵敏度定义为

$$^{(n)}NS_x^{\varphi_n(\cdot)}\triangleq\frac{1}{\varphi_n(\omega)}\operatorname{Im}[^{(n)}NS_x^{\hat{H}_n(j\omega)}] \tag{35}$$

推论 5

$$^{(n)}NS_x^{\hat{H}_n(j\omega)} = {}^{(n)}NS_x^{|\hat{H}_n(j\omega)|} + j\,{}^{(n)}NS_x^{\varphi_n(\omega)} \tag{36}$$

推论 6　非线性系统 n 阶灵敏度集合为

$$\{{}^{(n)}NS_x^{|\hat{H}_n(j\omega)|},\ {}^{(n)}NS_x^{\varphi_n(\omega)}\} \tag{37}$$

类似地，可以定义非线性传递函数的 n 阶零、极点灵敏度。

线性灵敏度的性质对 n 阶灵敏度仍然成立。

由(17)式可知

$$H_n(j\omega, j\omega, \cdots, j\omega) = \frac{N_n(j\omega, \cdots, j\omega)}{D_n(j\omega, \cdots, j\omega)} \tag{38}$$

从而有

$$\hat{H}_n(j\omega) = \frac{\hat{N}_n(j\omega)}{\hat{D}_n(j\omega)} \tag{39}$$

这样有

推论 7

$$^{(n)}NS_x^{\hat{H}_n(j\omega)} = {}^{(n)}NS_x^{N_n(j\omega)} - {}^{(n)}NS_x^{\hat{D}_n(j\omega)} \tag{40}$$

定义 6　多参数 n 阶灵敏度定义为

$$^{(n)}MNS_x^{H_n(\cdot)} \triangleq \sum_{i=1}^{m} {}^{(n)}NS_x^{H_n(\cdot)} \tag{41}$$

性质 1　多参数 n 阶灵敏度具有如下不变性

$$^{(n)}MNS_x^{H_n(\cdot)} - {}^{(n)}MNS_y^{H_n(\cdot)} = 0 \tag{42}$$

式中 x, y 为系统参数。

利用(41)式即可证明性质 1。

性质 2

$$^{(n)}MNS_x^{H_n(\cdot)} = {}^{(n)}MNS_y^{H_n(\cdot)} = \frac{\partial \ln H_n(\cdot)}{\partial \ln s_i} \tag{43}$$

定义 7　线性改进传递函数为

$$H_M(j\omega) = H_1(j\omega) + \frac{3}{4}A^2\hat{H}_3(j\omega) \tag{44}$$

(44)式推导请参看文献[3]。

四、灵敏度分析的符号函数法

由(17)式可知，n 阶非线性传递函数可写为

$$T_n(s_1, s_2, \cdots, s_n) = \frac{N_n(s_1, s_2, \cdots, s_n)}{D_n(s_1, s_2, \cdots, s_n)} \tag{45}$$

记

$$H_n(\cdot) = D_n(\cdot) - \frac{1}{T_n(\cdot)} \cdot N_n(\cdot) = 0 \tag{46}$$

$$P_n(\cdot) = 1/T_n(\cdot) \tag{47}$$

进一步 $H_n(\cdot)$ 可写为

$$H_n(\cdot) = A_n + B_n x + P_n(C_n + F_n x) = 0 \tag{48}$$

式中 x 为系统参数．由(48)式求解 P_n 和 x，有

$$P_n(\cdot) = -\frac{A_n + B_n x}{C_n + F_n x} \tag{49}$$

$$x = -\frac{A_n + C_n P_n}{B_n + F_n P_n} \tag{50}$$

从而

$$\frac{\partial P_n}{\partial x} = -\frac{\partial H_n/\partial x}{\partial H_n/\partial P_n} = -\frac{B_n + F_n P_n}{C_n + F_n x} \tag{51}$$

$${}^{(n)}NS_x^{P_n} = \frac{\partial P_n}{\partial x} \cdot \frac{x}{P_n} = -\frac{A_n + C_n P_n}{A_n + B_n x} \tag{52}$$

上式可进一步写成

$${}^{(n)}NS_x^{P_n} = \frac{C_n}{C_n + F_n x} - \frac{A_n}{A_n + B_n x} \tag{53}$$

从而

$${}^{(n)}NS_x^{T_n(\cdot)} = \frac{\partial \ln T_n(\cdot)}{\partial \ln x} = -\frac{\partial \ln P_n(\cdot)}{\partial \ln x} = {}^{(n)}NS_x^{P_n(\cdot)} \tag{54}$$

这样，我们得到

定理 1

$${}^{(n)}NS_x^{T_n(\cdot)} = {}^{(n)}NS_x^{P_n(\cdot)} \tag{55}$$

实际上，上述步骤说明了求解非线性系统的 n 阶灵敏度的符号法．由此可见，利用本文的方法，灵敏度的计算化为对一组传递函数灵敏度的分析．因此，本文的研究为非线性灵敏度的分析提供了新的理论和方法．

五、结 论

(1) 本文给出的非线性传递函数的性质为非线性系统分析、综合和故障诊断提供了新的理论基础．其中诸如 n 阶零极点、n 阶频率响应、n 阶稳定性和 n 阶灵敏度等都是已有文献所不曾讨论过的．

(2) 本文建立的非线性灵敏度理论和方法是一完全解析的理论和频域中的**符号法**，这对于非线性系统的研究有着重要的意义．

参 考 文 献

[1] L. O. Chua, C. Y. Ng. *Electronic Circuits and Systems*, 3(1979), 165—185.
[2] 焦李成，非线性系统的 Volterra 泛函分析，西安交通大学硕士论文，1984.
[3] 焦李成，中国民航学院学报，1986 年第 2 期，第 14—25 页.
[4] I. W. Sandberg, *Bell Sys. Tech. J.*, 61(1982), 159—200.

[5] W. J. Rugh, Nonlinear System Theory, John Hopkins University Press, Baltimore, 1981.
[6] L. C. Jiao, Proc. ISCAS'86, San Jose, 1986, 1241—1244.

SENSITIVITY ANALYSIS OF NONLINEAR CIRCUITS AND SYSTEMS ——NONLINEAR TRANSFER FUNCTION APPROACH

Jiao Licheng
(Chinese Institute of Civil Aviation, Tainjing)

Abstract The properties of a nonlinear transfer function are studied. The new ideas of nth-order stability, nth-order zero-pole point, nth-order frequency response and nth-order sensitivity as well as a new theory and implementation on sensitivity of nonlinear circuits and systems are proposed.

Key words Circuits and systems; Nonlinear transfer function; Sensitivity