

一种改进的变步长 ELMS 算法

吕振肃 黄石

(兰州大学信息工程学院 兰州 730000)

摘要: 在简单讨论基本最小均方(LMS)算法的基础上, 引入了扩展的最小均方(ELMS)算法, 并分析说明了该算法能达到更小的稳态MSE。改进的变步长ELMS算法是在对有用信号的预测中采用了自适应为归一化的的最小均方(NLMS)预测估计器, 步长的迭代中引入遗忘因子 λ_i , 利用其与误差信号的加权和来产生新的步长参与迭代。理论与计算机仿真结果表明, 该算法有较好的收敛性能和较小的稳态失调。

关键词: LMS 算法, 变步长, ELMS 算法, 信号估计器, 遗忘因子

中图分类号: TN 911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2005)10-1524-03

A Refrained Variable Step-Size ELMS-Like Algorithm

Lu Zhen-su Huang Shi

(College of Information Science and Engineering, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China)

Abstract Following a brief discussion on basic LMS algorithms, the ELMS algorithms with steady small MSE is introduced. The new algorithm using the adaptive NLMS signal-estimator to predict the signal $s(k)$. Forgetting factor λ_i and error signal are used to control the step size update for iteration. Theoretics analysi and computer simulations demonstrate that the presented algorithm has good performance both in convergence properties and steady small misadjustment.

Key words LMS algorithm, Variable step-size, ELMS algorithm, Signal-estimator, Forgetting factor

1 引言

由于最小均方(LMS)算法简单、计算量小, 易于实现实时处理, 因而在电信、雷达、声纳、实时控制以及图像处理等领域都得到了广泛的应用。但由于超量均方误差直接与自适应步长成比例, 减小步长可以获得小的MSE, 但收敛时间又将增大, 因此, 固定步长的自适应滤波算法在收敛速度、时变系统跟踪能力和收敛精度方面对步长 μ 的要求是相互矛盾的, 步长因子的设定对算法性能有很大的影响^[1-4]。

本文在扩展的最小均方(ELMS)算法的基础上, 提出了一种改进预测的可变步长(NVSS)ELMS算法。在改进预测器的同时, 通过引入遗忘因子 λ_i , 并利用其对当前和过去共 M 个误差加权和的平方来作为标准调节步长。理论分析及计算机仿真结果表明, 该算法在保证基本ELMS稳态均方误差小的前提下, 取得了较快的收敛速度和较小的失调, 能有效地去除不相关噪声的干扰。

2 改进的变步长 ELMS 算法

一个基本的自适应横向滤波器如图 1, $x(n)$ 为输入信号,

$w(n)$ 为加权矢量, $y(n)$ 为自适应滤波器的输出, $e(n)$ 为误差信号, μ 为步长因子。 $d(k)=s(k)+n_0(k)$ 为期望信号, 其中 $n_0(k)$ 为加性干扰噪声。

由于LMS算法^[5]的误差梯度矢量为

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}(k) &= -2e(k)\mathbf{x}(k) = -2\{[s(k) + n_0(k)] - \mathbf{w}^T(k)\mathbf{x}(k)\}\mathbf{x}(k) \\ &= -2s(k)\mathbf{x}(k) - 2\{[n_0(k) - \mathbf{w}^T(k)\mathbf{x}(k)]\mathbf{x}(k)\} \end{aligned} \quad (1)$$

因为 $E[s(k)\mathbf{x}(k)]=0$, 而式(1)瞬时梯度值 $\hat{\nabla}(k)$ 中附加了一项 $-2s(k)\mathbf{x}(k)$ 。为了减少误差梯度矢量的干扰, 文献[6]提出了 ELMS 算法, 采用修正的瞬时梯度估计值:

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}(k) &= -2[e(k) - \hat{s}(k)]\mathbf{x}(k) \\ &= -2[s(k) - \hat{s}(k)]\mathbf{x}(k) - 2[n_0(k) - \mathbf{w}^T(k)\mathbf{x}(k)]\mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $\hat{s}(k)$ 为对信号 $s(k)$ 的预测估计值。相应的 ELMS 算法的迭代公式为

$$\begin{aligned} e(k) &= d(k) - \mathbf{w}^T(k)\mathbf{x}(k) \\ \mathbf{w}(k+1) &= \mathbf{w}(k) + 2\mu[e(k) - \hat{s}(k)]\mathbf{x}(k) \\ \hat{s}(k) &= \sum_{i=1}^L \alpha_i e(k-i) \left(\sum_{i=1}^L \alpha_i = 1 \right) \end{aligned}$$

如图 1 所示: $e(n)=d(n)-y(n)=s(n)+N_0(n)-y(n)$

因此 $e^2(n)=s^2(n)+[N_0(n)-y(n)]^2+2s(n)[N_0(n)-y(n)]$

故 $E[e^2(n)]=E[s^2(n)]+E\{[N_0(n)-y(n)]^2\}+2E\{s(n)[N_0(n)-y(n)]\}$

自适应滤波器的调节使 $E[e^2(n)]$ 最小, 即是使 $E[N_0(n)-y(n)]^2$ 最小。又

$$e(n)-s(n)=s(n)+N_0(n)-y(n)-s(n)=N_0(n)-y(n)$$

故自适应滤波器输出信号 $e(n)$ 与有用信号 $s(n)$ 均方差最小, 理想情况下 $e(n)=s(n)$ 。因此式(2)可以采用滑动平均法, 利用前 L 次输出值 $e(n)$ 来对 $s(k)$ 进行预测。

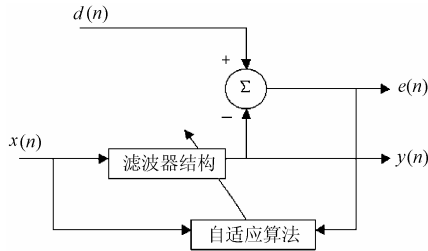


图 1 自适应横向滤波器

由于归一化最小均方(NLMS)算法结构简单, 具有大的输入动态范围, 在小的误差范围内有小的失调量, 提高了跟踪性能, 所以本文中在 $\hat{s}(k)$ 的预测中采用 NLMS 算法^[7]。其迭代式如下:

$$\hat{s}(k) = \mathbf{w}_1^T(k) \mathbf{e}(k)$$

$$\mathbf{w}_1(k+1) = \mathbf{w}_1(k) + 2 \frac{\alpha}{\beta + \mathbf{e}_k^T \mathbf{e}_k} [e(k) - \hat{s}(k)] \mathbf{e}(k)$$

$$\mathbf{e}_k^T \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_{k-1}^T \mathbf{e}_{k-1} + e^2(k) - e^2(k-1)$$

其中 α, β 是为了避免在 $\mathbf{e}(n)$ 中积很小的情况下 μ 过大, 而引入的正常数。向量 $\mathbf{e}(k) = [e(k) e(k-1) \dots e(k-l+1)]$ 。由于每次迭代都需要计算 $\mathbf{e}_k^T \mathbf{e}_k = e^2(k) + e^2(k-1) + \dots + e^2(k-l+1)$ 计算量跟抽头数 L 成正比。本文在实际实现时充分利用了前一次的计算值, 极大地减少了每次迭代的计算量。在有效跟踪信号 $s(k)$ 的前提下, 新估计器的计算量仅增加 $2L+2$ 次乘法与 L 次加法, 当 L 选择恰当时, 计算量增加是很小的。

由式(1)和式(2)可知对于 LMS,

$$\xi_{\min} = E[e(k)]^2 \Big|_{\mathbf{w}=\mathbf{w}^*} = E[s^2(k)] + E[(n_0(k) - \mathbf{w}^{*T} \mathbf{x}(k))^2]$$

对于 ELMS, $\xi'_{\min} = E[(s(k) - \hat{s}(k))^2] + E[(n_0(k) - \mathbf{w}^{*T} \mathbf{x}(k))^2]$ 。其中 \mathbf{w}^* 为最佳权向量。可见当 $\hat{s}(k)$ 是 $s(k)$ 较好估计时, ξ'_{\min} 将远小于 ξ_{\min} , ELMS 算法稳态误差性能要比 LMS 优越得多。

另一方面算法的初始收敛速度, 时变系统跟踪能力及稳态失调是衡量自适应滤波算法优劣的 3 个最重要的技术指标。文献[2]通过引入修正的瞬时梯度估计值, 大大减小了稳态均方误差。但由于主输入端不可避免地存在噪声, 减小步长因子 μ 可以减少自适应滤波算法的稳态失调噪声, 提高收敛精度, 但 μ 的减小将降低算法的收敛速度和跟踪速度。因

此我们有必要寻求一种步长调整方案即当权向量远离最佳权向量 \mathbf{w}^* 时, 使用较大的步长, 加快收敛速度, 当权向量接近于最佳权向量 \mathbf{w}^* 时, 采用较小的步长, 在 \mathbf{w}^* 附近产生较小的失调。

本文在文献[4]的基础上提出了一种新的变步长算法来控制自适应步长, 该算法步长因子更新公式如下:

$$e(k) = d(k) - \mathbf{x}^T(k) \mathbf{w}(k)$$

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + \mu(k)[e(k) - \hat{s}(k)] \mathbf{x}(k)$$

$$\lambda_k = \sum_{i=0}^{M-1} \lambda(i) e(k-i) = \sum_{i=0}^{M-1} \exp(-i) e(k-i)$$

$$\mu(k+1) = \alpha \mu(k) + \gamma \lambda_k^2$$

$$\mu(k+1) < \beta \mu(k) \text{ 则 } \mu(k+1) = \beta \mu(k)$$

$$\mu(k+1) > \frac{1}{\beta} \mu(k) \text{ 则 } \mu(k+1) = \frac{1}{\beta} \mu(k)$$

式中 $0 < \beta < 1, 0 < \alpha < 1$, 起始步长 $\mu(0)$ 一般取为最大步长 μ_{\max} , μ_{\max} 的取值接近标准 LMS 算法的不稳定步长点以提供最大可能的收敛速度。由文献[5]知, $0 < \mu_{\max} < 2/(3\text{tr}(\mathbf{R}))$ 。 λ_i 为遗忘因子, 通过它对过去的 M 个误差 $e(k), e(k-1), \dots, e(k-M+1)$ 作非线性加权, 越是过去的误差信息对当前的权系数调整作用越小。因此在自适应初始阶段, 误差大, λ_k 也较大, 这使得步长增加收敛速度加快。随着自适应过程的进行, 误差逐渐减小, λ_k 也减小, 使得步长减小, 产生小的失调。参数 β 可以控制 $\mu(k)$ 始终在最佳步长附近变化, 不会因独立噪声的干扰而产生较大幅度的变化, 增强了算法的鲁棒性。新的变步长算法在计算量上仅增加了 M 次的乘法运算, 但在实际硬件如 DSP 实现时可以将 $\exp(-i)$ 函数变为 2^{-i} , 这样只需每次迭代时将缓冲区的数据 $e(k)$ 依次移位即可, 其计算量几乎可以忽略。

因此将该步长调整算法应用于改进预测的 ELMS, 一方面保证了 ELMS 算法的优越性, 另一方面也保证了算法在初始阶段和收敛阶段步长变化相对较小, 兼顾了自适应开始时高收敛速度和收敛时的较小失调。

3 计算机模拟仿真结果及分析

下面通过计算机模拟来验证和分析本文给出的改进预测的变步长 ELMS 算法的收敛性能及稳态均方误差。本文以单频正弦波叠加高斯白噪声作为主通道的期望信号 $d(n)$, 即 $d(n)=s(n)+N_0(n)+N_1(n)$ 。其中 $N_0(n)$ 为与 $x(n)$ 相关的加性噪声, $N_1(n)$ 为与 $x(n)$ 不相关的白噪声输入。理想情况下, 自适应滤波器将 $x(n)$ 处理成 $N_0(n)$ 即输出 $y(n)=N_0(n)$, 与期望信号 $d(n)$ 中的 $N_0(n)$ 相减, 则 $e(n)=s(n)+N_1(n)$ 。采用文献[2]提出的变步长 (VS)-NLMS 算法, 其步长因子 μ 与 $e(n)$ 和 $x(n)$ 的互相关函数的估值成正比, 以及基本 ELMS 算法和本文提出的改进预测的

变步长ELMS算法分别进行噪声对消仿真,分别做200次独立仿真,再取统计平均,采样点数为1000。变步长VS-NLMS算法采用该文中的 $\alpha=1$, $\lambda=0.997$ 。本文算法采用参数为: $\alpha=0.97$, $\beta=0.998$, $\gamma=8\times 10^{-4}$ 。仿真结果如下。

图2(a)是期望信号 $d(n)$,其中包含有用信号 $s(n)$ 和噪声信号 $N_0(n)$ 和 $N_1(n)$ 。可以看出,有用信号被干扰噪声所淹没,很难检测出来。图2(b)为采用(NVSS)ELMS算法自适应噪声对消后的信号 $e(n)$,从图中可以看出该算法有效地去除了噪声信号,并且收敛性、时变跟踪性较VS-NLMS算法性能好。由图2(c)可见本文提出的(NVSS)ELMS算法收敛速度明显快于VS-NLMS算法,而且输出的MSE要小得多,在算法收敛后尤其明显。图2(d)则说明了该算法的收敛速度比基本ELMS算法有明显的提高,而且最后都能稳定收敛到比其它算法都要小的MSE。

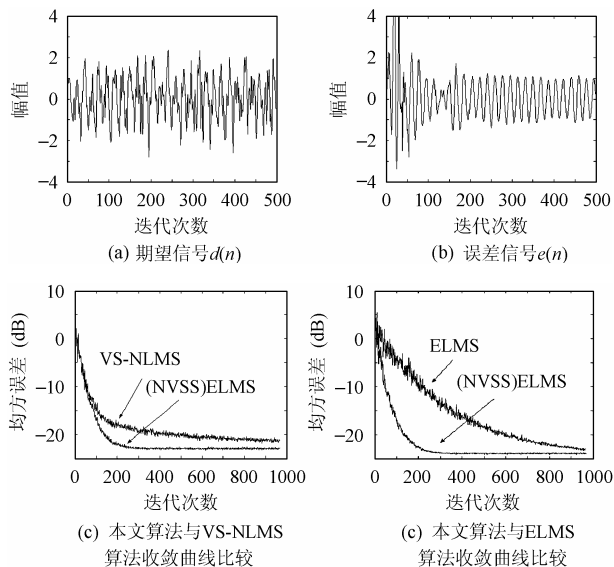


图2

4 结束语

本文提出的改进预测的变步长ELMS自适应算法是在基

适应NLMS预测估计器,并且在权系数更新中,引入遗忘因子 λ_i ,根据当前和过去共 M 个误差加权和平方的平方作为标准来调节步长。分析表明,该算法能迅速有效地接近最佳权系数值,并不受不相关噪声干扰,与其它变步长LMS算法和基本ELMS算法相比,具有明显地优越性。通过计算机仿真,结果表明本文算法收敛快,稳态MSE小,与理论分析结果是一致的。

参考文献

- [1] 吴光弼, 祝琳瑜. 一种变步长 LMS 自适应滤波算法[J]. 电子学报, 1994, 22(1): 55 – 60.
- [2] 叶华, 吴伯修. 变步长自适应滤波算法的研究[J]. 电子学报, 1990, 18(4): 63 – 69.
- [3] Apolnario J A Jr, Werner S, Diniz P S R. Constrained normalized adaptive filters for CDMA mobile communications. <http://www.lps.ufrj.br/profs/diniz/conf/confi61.pdf>.
- [4] Kwong R H, Johnston E W. A variable step size LMS algorithm. *IEEE Trans.on Signal Processing*, 1992, 40(7): 1636 – 1642.
- [5] Widrow B. Adaptive Signal Processing. New York: Prentice-Hall Inc, 1985.
- [6] YuXiao, Wang Qicai. An extended LMS algorithm in ANC. ICNNSP'95, Nanjing, China, 1995: 737 – 740.
- [7] Dirk T M Slock. On the convergence behavior of LMS and the NLMS algorithms. *IEEE. Trans.on TASSP*, 1993, 141(9): 2811 – 2825.

吕振肃: 男, 1946年生, 教授, 研究方向为数字信号处理、智能控制、计算机网络技术。

黄石: 男, 1980年生, 硕士生, 研究方向为智能优化算法、自适应信号处理、DSP技术。

本ELMS算法的基础上, 通过对有用信号 $s(n)$ 预测时采用自