第9卷 第4期　　电子科学学刊　　Vol. 9, No. 4
1987年7月　　JOURNAL OF ELECTRONICS　　July, 1987

等重码的约翰逊界和格雷厄姆界的几点注记* **

杨义先
(北京邮电学院科研所)

提　　要

本文给出了四类达到约翰逊上界的等重码和两类超过格雷厄姆下界的等重码.

1. 引言

许多文章都在不同的限制条件下给出了等重码的各种上界和下界[1,2]. 但是在对这些界的评价方面作的工作却很少, 例如早在1962年约翰逊(Johnson)就给出了等重码的约翰逊界[1]. 但是一直到最近(1985年)胡正名教授才在文献[3]中首次用巧妙的方法找到了一类达到约翰逊上界的等重码. 关于其它界的评价工作就更少了. 本文将用较小的篇幅给出四类达到约翰逊上界的等重码和两类超过格雷厄姆(Graham)下界的等重码.

2. 基本定义

为方便计,在本节中先介绍块设计和关联矩阵的概念. 设 $\boldsymbol{X}$ 是元素为 $X_1,\cdots,X_V$ 的 V 集, $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_b$ 是 $\boldsymbol{X}$ 的 b 个不同的子集. 假设这些子集满足下列条件: (1) 每个 $\boldsymbol{X}_i$ 是 $\boldsymbol{X}$ 的 K 子集. (2) $\boldsymbol{X}$ 的每个2子集正好是 b 个集合 $\boldsymbol{X}_1,\cdots,\boldsymbol{X}_b$ 中 λ 个集合的子集. (3)整数 V, K 和 λ 满足: $0<\lambda$, $K<V-1$, 则称这些子集是一个 (b,V,r,K,λ) 块设计(其中 $bK=Vr$). 特别当 $b=V$ 时就简称为 (V,K,λ) 块设计. 若令

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{当 } x_j\in x_i \text{ 时};\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

那么就称矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ 为此块设计的关联矩阵. 容易看出如果将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一行看成一个码字,那么我们就得到了一个码长$=V$, 码重$=K$, 码间最小距离$=2(K-\lambda)$, 码字数$=b$ 的等重码. 我们称此码为与 (b,V,K,r,λ) 块设计所对应的等重码.

3. 关于约翰逊界

约翰逊界[1] $R(n,w,d)$ 表示码长为 n, 码重为 w, 码间最小距离为 $d(d=2u$ 为偶数)的等重码的码字个数. 如果 $nu>w(n-w)$ 则 $R(n,w,2u)\leqslant nu/(nu-w(n-w))$. 现在我们就给出四类达到此上界的码,即能使上式的等号成立的码.

第一类　由文献[4]知,具有参数 $V=(m^p-1)/(m-1)$, $K=(m^{p-1}-1)/(m-1)$,

* 1986年3月18日收到, 1986年9月8日修改定稿.
** 中国科学院科学基金资助课题.

$\lambda=(m^{p-2}-1)/(m-1)$ 的 (V,K,λ) 块设计是存在的(此处 p 是正整数，m 是素数的任意次幂)．于是与此块设计对应的等重码的参数为：码长 $n=(m^p-1)/(m-1)$，码重 $w=(m^{p-1}-1)/(m-1)$，码间最小距离 $d=2(k-\lambda)=2\cdot m^{p-2}$，码字数 $R(n,w,d)=(m^p-1)/(m-1)$．不难验证，$R(n,w,d)=nu/(nu-w(n-w))$ 成立，即它达到了等重码的约翰逊上界．此类等重码与文献[3]中给出的等重码有相似的参数，但是注意文献[3]中限制 m 是素数，而现在 m 可以是素数的任意次幂．

第二类　任意一个哈达玛德（Hadamard）设计(即参数为 $V=4t-1,K=2t-1,\lambda=t-1$ 的 $(V,K,\lambda,)$ 块设计，此处 t 是正整数）所对应的等重码的参数为：码长 $n=4t-1$，码重 $w=2t-1$，码间最小距离 $d=2t$，码字个数 $R(n,w,d)=4t-1$．不难验证此时等式 $R(n,w,d)=nu/(nu-w(n-m))$ 成立，即它达到了等重码的约翰逊上界．还有人猜测，对任意正整数 t 都至少存在一个 $(4t-1,\ 2t-1,\ t-1)$ 设计．这就是至今未被解决的著名的哈达玛德猜想．

第三类　由文献[4]知，具有参数 $V=8x^2+1,K=x^2,\lambda=(x^2-1)/8$（此处 x 是奇数)的块设计存在．与此 (V,K,λ) 块设计所对应的等重码具有如下参数：码长 $n=8x^2+1$，码重 $w=x^2$，码间最小距离 $d=(7x^2+1)/4$，码字个数 $R(n,w,d)=8x^2+1$．不难验证等式 $R(n,w,d)=nu/(nu-w(n-w))$ 成立，即该码达到约翰逊上界．

第四类　由文献[4]知，具有参数 $V=4x^2+1,K=x^2,\lambda=(x^2-1)/4$（此处 x 是奇数)的 (V,K,λ) 块设计是存在的．与此 (V,K,λ) 块设计相对应的等重码的参数为：码长 $n=4x^2+1$，码重 $w=x^2$，码间最小距离 $d=(3x^2+1)/2$，码字个数 $R(n,w,d)=4x^2+1$．不难验证此时也有 $(R,w,d)=nu/(nu-w(n-w)$，即该码也达到约翰逊上界．

由文献[3]和上述四类等重码，可知能达到约翰逊上界的等重码确实不少．但是约翰逊界是否一定能达到呢？就是说下列判断："对任意正整数 n,w,d，只要 $nu>w(n-w)$，那么必定存在一个码长为 n，码重为 w，码间最小距离为 $2u$，码字个数为 $R(n,w,2u)$ 的等重码，它能使等式 $R(n,w,d)=nu/(nu-w(n-w))$ 成立．"是否正确呢？这有待进一步研究．

4. 关于格雷厄姆界

格雷厄姆界[2]

$$R(n,w,4)\geqslant\frac{1}{n}\binom{n}{w},$$

此处

$$\binom{n}{w}=n!/(w!(n-w)!).$$

下面我们就给出两类超过此下界的等重码．

第一类　由文献[4]知，具有参数为 $V=6t+3,b=(3t+1)(2t+1),r=3t+1,K=3,\lambda=1$ 的 (b,V,r,K,λ) 块设计是存在的．与此块设计对应的等重码的参数是：码长 $n=6t+3$，码重 $w=3$，码间最小距离 $=4$，码字个数为 $R(n,w,4)=(3t+1)(2t+1)$．不难验证此时

$$R(n,w,4) > \frac{1}{n}\binom{n}{w}.$$

第二类　　由文献[4]知，具有参数为：$V = 6t + 1 = p^n$(p 是素数)，$b=(6t+1)t$，$r = 3t, K = 3, \lambda = 1$ 的 (b, V, r, K, λ) 块设计存在．与此块设计对应的等重码的参数为：码长 $n = 6t + 1$，码重 $w = 3$，码间最小距离$=4$，码字个数 $R(n,w,4) = (6t+1)t$．不难验证此时确有

$$R(n,w,4) > \frac{1}{n}\binom{n}{w}.$$

本文是在北京邮电学院胡正名，周炯槃教授的指导和关怀下完成的．特此致谢．

参　考　文　献

[1] S. M. Johnson, *IRE Trans. on-IT,* **IT-18** (1962), 203.
[2] R. L. Graham, *IEEE Trans. on-IT,* **IT-26**(1980), 37.
[3] 胡正明，通信学报，1985年，第2期，第44页．
[4] M. Hall Jr., "Combinatorial Theory", Blaisdell, Waltham, Mass, p. 141, pp. 232—233.

SOME NOTES ON JOHNSON BOUND AND GRAHAM BOUND OF CONSTANT WEIGHT CODES

Yang Yixian
(Beijing Institute of Posts and Telecommunications)

Four classes of constant weight codes which can meet the Johnson upper bound and two classes of constant weight codes which are greater than the Graham lower bound are given in this paper.