

电子迴旋谐振脉塞中的动量离散理论*

张世昌

(桂林电子工业学院无线电工程系)

提 要

本文研究了横向及纵向动量离散对电子迴旋谐振脉塞的影响。文中求得了扰动分布函数的一般表达式和 TE_{mn} 模的任意次迴旋谐波与电子注相互作用的色散方程。作为两种特例,即当动量离散趋于零和 $m=0$ 时,本文结果与有关文献基本一致。

一、引 言

电子迴旋谐振脉塞 (ECRM) 作为一种新型的毫米波、亚毫米波器件,近年来已经证实了它具有大功率、高效率等一系列优点,具有诱人的前景,因此,引起了人们对 ECRM 理论及实验研究的极大兴趣^[1,2]。

在 ECRM 动力学理论中,多数文献都没有考虑电子动量离散的影响,而同时考虑横向及纵向动量离散的文章则至今尚未见到过,事实上,动量离散不仅实际存在,而且对 ECRM 有着重要影响,特别是在利用高次迴旋谐波,以及设计迴旋行波放大器时,它的影响就显得更为重要。

本文提出了同时存在横向及纵向动量离散的情况下,电子注与 TE_{mn} 模的任意次迴旋谐波相互作用的线性理论。

二、扰动分布函数

ECRM 中注波相互作用区的结构如图 1 所示。接地金属圆波导(内半径为 R_w) 内有一同轴空心相对论性薄电子注。电子注的长度 L 与其平均半径 R_0 相比可视为无限长,其径向平均厚度为 $2a$, 纵向速度为 $v_z \mathbf{e}_z$ 。波导内沿轴向存在一均匀强磁场 $\mathbf{B} = B_z \mathbf{e}_z$, 电子注可认为具有轴对称性和足够稀薄。这样,电子所受到的扰动场,可近似地用真空波导场代替^[3]。

按波导理论^[4], TE_{mn} 模场分量可写作:

$$\mathbf{E}_\perp = -j\omega\mu_0(\mathbf{e}_z \times \nabla_\perp \phi_{mn}), \quad (1)$$

$$\mathbf{H}_\perp = jk_\parallel \nabla_\perp \phi_{mn}, \quad (2)$$

$$H_z = k_c^2 \phi_{mn} \mathbf{e}_z, \quad (3)$$

* 1981年12月28日收到, 1982年9月20日修改定稿。

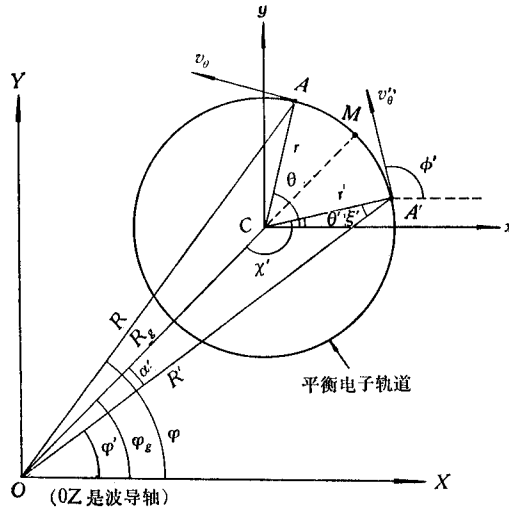


图 1 ECRM 示意图及其坐标系

Fig. 1 Schematic diagram of ECRM and the coordinate systems

$$\psi_{mn} = -J_m(k_c R) e^{jm\varphi + j(k_{\parallel} z - \omega t)}, \quad (4)$$

其中 k_{\parallel} 为纵向波数, k_c 为截止波数

$$k_c = \alpha_{mn}/R_W; \quad (5)$$

α_{mn} 为满足

$$J'_m(\alpha) = \frac{\partial J_m(\alpha)}{\partial \alpha} = 0 \quad (6)$$

的第 n 个根; $J_m(\alpha)$ 为 m 阶第一类 Bessel 函数. 在三角形 AOC 中, 利用 Graf 公式^[5] 可得

$$\psi_{mn} = - \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_{m-l}(k_c R_g) J_l(k_c r) e^{i(m-l)\varphi_g + jl\theta + j(k_{\parallel} z - \omega t)}. \quad (7)$$

将(7)式代入(1)–(3)式可得 TE_{mn} 模由 r, θ, z 表出的分量式

$$E_r = +\omega\mu_0 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{l}{r} J_l(k_c r) J_{m-l}(k_c R_g) e^{i(m-l)\varphi_g + j(k_{\parallel} z - \omega t) + jl\theta}, \quad (8)$$

$$E_{\theta} = +j\omega\mu_0 k_c \sum_{l=-\infty}^{\infty} J'_l(k_c r) J_{m-l}(k_c R_g) e^{i(m-l)\varphi_g + j(k_{\parallel} z - \omega t) + jl\theta}, \quad (9)$$

$$H_r = -jk_{\parallel} k_c \sum_{l=-\infty}^{\infty} J'_l(k_c r) J_{m-l}(k_c R_g) e^{i(m-l)\varphi_g + j(k_{\parallel} z - \omega t) + jl\theta}, \quad (10)$$

$$H_{\theta} = +k_{\parallel} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{l}{r} J_l(k_c r) J_{m-l}(k_c R_g) e^{i(m-l)\varphi_g + j(k_{\parallel} z - \omega t) + jl\theta}, \quad (11)$$

$$H_z = -k_c^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(k_c r) J_{m-l}(k_c R_g) e^{i(m-l)\varphi_g + j(k_{\parallel} z - \omega t) + jl\theta}. \quad (12)$$

(8)–(12)式与由 R, φ, z 表出的分量式相比较, 具有如下物理意义: 由于电子在

迴旋中心坐标系中沿 θ 方向作周期性的圆周运动, 因此, 它所感受到的波导场对 θ 来说, 也具有周期性, 并由一系列谐波组成. 这种谐波不同于慢波系统中的空间谐波, 后者是由器件的空间结构的周期性引起的, 而前者是由迴旋运动的周期性引起的(电子本身所感受到的), 因此称为“迴旋谐波”.

采用沿未扰轨道积分法^[6], 可得扰动分布函数

$$\begin{aligned} f_1 = & -e \int_{-\infty}^t \left\{ \left[E'_r + \frac{p'_\theta}{\nu m_0} B'_z - \frac{p'_z}{\nu m_0} B'_\theta \right] \left[\frac{-1}{p'_\theta} \frac{\partial R'_g}{\partial \phi'} \frac{\partial}{\partial R'_g} f_0(R_g, p_\theta, p_z) \right] \right. \\ & + \left(E'_\theta + \frac{p'_z}{\nu m_0} B'_r \right) \left[\frac{\partial R'_g}{\partial p'_\theta} \frac{\partial}{\partial R'_g} f_0(R_g, p_\theta, p_z) + \frac{\partial}{\partial p'_\theta} f_0(R_g, p_\theta, p_z) \right] \\ & \left. + \left(E'_z - \frac{p'_\theta}{\nu m_0} B'_r \right) \frac{\partial}{\partial p'_z} f_0(R_g, p_\theta, p_z) \right\} dt', \end{aligned} \quad (13)$$

式中 e 、 m_0 为电子的电量及静质量, ν 为相对论因子, R_g 为引导中心的径向坐标, p_θ 、 p_z 为电子的横向及纵向动量, ϕ 为动量空间角, f_0 为平衡分布函数.

由图 1 中几何关系可得

$$\xi' = \varphi' - \theta' = \varphi' - \phi' + \frac{\pi}{2}, \quad (14)$$

$$\phi' = \theta' + \frac{\pi}{2}, \quad (15)$$

$$\chi' = \pi - \varphi'_g + \theta' = \frac{\pi}{2} + \phi' - \varphi'_g, \quad (16)$$

$$R_g'^2 = R^2 + \frac{p_\theta'^2}{e^2 B_0^2} - 2R' \frac{p_\theta'}{e B_0} \sin(\phi' - \varphi'), \quad (17)$$

$$\theta' = \theta - \omega_c(t - t'), \quad z' = z - v_z(t - t'), \quad (18)$$

$$p'_\theta = p_\theta, \quad p'_z = p_z, \quad (19)$$

$$\varphi'_g = \varphi_g, \quad R'_g = R_g, \quad r' = r, \quad (20)$$

$$\frac{\partial R'_g}{\partial p'_\theta} = \frac{\cos \chi'}{e B_0} = \frac{1}{2e B_0} (e^{j\chi'} + e^{-j\chi'}), \quad (21)$$

$$\frac{\partial R'_g}{\partial \phi'} = \frac{-R' r' \sin \xi'}{R'_g} = -r' \sin \chi' = \frac{j r'}{2} (e^{j\chi'} - e^{-j\chi'}), \quad (22)$$

ω_c 为电子的迴旋频率, 即

$$\omega_c = \omega_{e0}/\nu = e B_0/\nu m_0. \quad (23)$$

将(8)–(12)式、(14)–(22)式代入(13)式, 可得扰动分布函数的普遍表达式

$$\begin{aligned} f_1 = & \sum_{l=-\infty}^{\infty} e \mu_0 k_c e^{j(k_{\parallel} x - \omega t) + j(m-l)\varphi_g + j l \theta} \left\{ \frac{(\omega - k_{\parallel} v_z) J'_l(k_c r_c) J_{m-l}(k_c R_g)}{(\omega - k_{\parallel} v_z - l \omega_c)} \right. \\ & \cdot \frac{\partial}{\partial p_\theta} f_0(R_g, p_\theta, p_z) + \frac{k_{\parallel} v_\theta J_l(k_c r_c) J_{m-l}(k_c R_g)}{(\omega - k_{\parallel} v_z - l \omega_c)} \\ & \cdot \frac{\partial}{\partial p_z} f_0(R_g, p_\theta, p_z) + \frac{-1}{e B_0} \left[J_l(k_c r_c) J'_{m-l}(k_c R_g) \right. \\ & \left. \left. + \frac{r_c \omega_c (m-l) J'_l(k_c r_c) J_{m-l}(k_c R_g)}{R_g (\omega - k_{\parallel} v_z - l \omega_c)} \right] \frac{\partial}{\partial R_g} f_0(R_g, p_\theta, p_z) \right\}, \end{aligned} \quad (24)$$

式中 r_c 为电子的拉莫尔半径。

三、色散方程

按正规模方法,由 Maxwell-Vlasov 方程可得

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_{\parallel}^2 - k_c^2\right) \mathbf{E}_{\perp} = -j\omega\mu_0 n_0 c \int \mathbf{v}_{\theta} f_1 d^3 p, \quad (25)$$

式中 c 为真空中光速, n_0 为电子注的平均密度, ω 为电磁波频率。

显然,将(24)式代入(25)式求积分时,涉及到平衡分布函数形式的具体选取问题。应当指出,电子注的实际分布本身就是一个十分复杂的有待进一步研究的问题。在进行理论计算时,由于数学上的困难,不得不对其函数形式进行适当简化^[7]。文献[6]已从理论上严格证明了由平衡态电子的运动常数(可以证明,在一般情况下为 $R_g, \varphi_g, p_{\theta}, p_z$; 当具有轴对称性时,简化为 R_g, p_{θ}, p_z) 构成的任意函数(自然包括 $f_0(p_{\theta}, p_z)$ 这种函数形式在内),均可作为平衡分布函数,根据这一结论,文献中已出现了多种不同形式的平衡分布函数^[8]。如(24)式所示,一个完整的平衡分布函数,应包含 R_g, p_{θ}, p_z 在内。但考虑到在实际器件中,电子的迴旋中心对电子注的平均半径偏离甚小,因此,迴旋中心离散的影响可忽略不计*。基于这个原因, Antakov^[10] 等人在研究单腔迴旋管的起始条件时,所选分布函数仅包含了 p_{θ} 和 p_z , 其理论结果与实验值基本一致。同理,本文选择如下形式的平衡分布函数:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi p_{\theta}} \frac{I(p_{\theta}, p_{\theta 0})}{2\Delta p_{\theta}} \frac{I(p_z, p_{z 0})}{2\Delta p_z}, \quad (26)$$

式中 $I(p_{\theta}, p_{\theta 0})$ 、 $I(p_z, p_{z 0})$ 为双脉冲函数,定义为

$$\frac{I(p_{\theta}, p_{\theta 0})}{2\Delta p_{\theta}} = \begin{cases} 1/2\Delta p_{\theta} & |p_{\theta} - p_{\theta 0}| \leq \Delta p_{\theta} \\ 0 & |p_{\theta} - p_{\theta 0}| > \Delta p_{\theta} \end{cases} \quad (27)$$

$$\frac{I(p_z, p_{z 0})}{2\Delta p_z} = \begin{cases} 1/2\Delta p_z & |p_z - p_{z 0}| \leq \Delta p_z \\ 0 & |p_z - p_{z 0}| > \Delta p_z \end{cases} \quad (28)$$

Δp_{θ} 和 Δp_z 分别为横向及纵向动量的离散量; $p_{\theta 0}$ 和 $p_{z 0}$ 分别为 p_{θ} 及 p_z 的平均值。

作为一个特例,当 $\Delta p_{\theta} \rightarrow 0$, $\Delta p_z \rightarrow 0$ 时,按广义函数定义^[11],可以证明

$$f_0 \Big|_{\substack{\Delta p_{\theta} \rightarrow 0 \\ \Delta p_z \rightarrow 0}} = \frac{1}{2\pi p_{\theta}} \delta(p_{\theta} - p_{\theta 0}) \delta(p_z - p_{z 0}). \quad (29)$$

将(29)式和(24)式代入(25)式,然后以 \mathbf{E}_{\perp} 的共轭复数点乘方程两边,再对波导截面进行积分,可得

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k_{\parallel}^2 - k_c^2 = \frac{\omega_p^2}{r c^2} \left[\frac{Q_{mnl}(\omega - k_{\parallel} v_z)}{(\omega - k_{\parallel} v_z - l\omega_c)} - \frac{W_{mnl} \beta_{\perp}^2 (\omega^2 - k_{\parallel}^2 c^2)}{(\omega - k_{\parallel} v_z - l\omega_c)^2} \right]. \quad (30)$$

(30)式已忽略了不同 l 值之间的模式耦合。式中

$$W_{mnl} = \frac{4a R_0 k_c^2 J_l^2(k_c a) J_{m-l}^2(k_c R_0)}{(k_c^2 R_w^2 - m^2) J_m^2(k_c R_w)}; \quad (31)$$

* 电子注的实际结构是一个相当复杂的问题,理论分析不得不对此进行适当简化。文献[9]根据上述事实,建立了以“电子迴旋系统”为基础的电子注的简化模型,得到了与本文相同的结论。

$$Q_{mnl} = 2W_{mnl} + \frac{4R_0 r_c^2 k_c^3 J_1'(k_c r_c) J_{m-l}^2(k_c R_0) J_1'(k_c r_c)}{J_m^2(k_c R_W) (k_c^2 R_W^2 - m^2)}; \quad (32)$$

ω_p 为等离子体频率, 定义为

$$\omega_p^2 = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_0}; \quad (33)$$

$\beta_{\perp} = v_{\theta}/c$ 。(30)式与文献[12]所得结果一致。

考虑到 ECRM 中 $(p_{\theta}^2 + p_z^2) < m_0^2 c^2$, 相对论因子 $\nu = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2(p_{\theta}^2 + p_z^2)} / m_0 c^2$ 可近似为

$$\nu = 1 + \frac{p_{\theta}^2 + p_z^2}{2m_0^2 c^2}. \quad (34)$$

将(24)、(26)、(34)式代入(25)式, 经一系列运算后, 得到同时考虑横向及纵向动量离散的色散方程的近似表达式

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{c^2} - k_{\parallel}^2 - k_c^2 = & \frac{\omega_p^2 W_{mnl}}{\nu c^2} \left\{ \frac{2\nu m_0^2 c^2}{2m_0^2 c^2 + p_{\theta 0}^2} \right. \\ & + \frac{\omega - k_{\parallel} v_z}{\Omega_l} - \frac{\nu^2 m_0^2 c \beta_{\perp} (\omega l \omega_c - k_{\parallel}^2 c^2)}{4\omega k_{\parallel} \Delta p_{\theta} \Delta p_z} \\ & \left. \cdot \ln \frac{\Omega_l^2 - \left[\left(\frac{\omega v_z}{m_0 c^2} - \frac{k_{\parallel}}{\nu m_0} \right) \Delta p_z + \frac{\omega v_{\theta}}{m_0 c^2} \Delta p_{\theta} \right]^2}{\Omega_l^2 - \left[\left(\frac{\omega v_z}{m_0 c^2} + \frac{k_{\parallel}}{\nu m_0} \right) \Delta p_z + \frac{\omega v_{\theta}}{m_0 c^2} \Delta p_{\theta} \right]^2} \right\}, \quad (35) \end{aligned}$$

式中 Ω_l 为多普勒频移,

$$\Omega_l = \omega - k_{\parallel} v_z - l \omega_c. \quad (36)$$

作为特例, 当 $m = 0$ 时, (35)式通过关系式

$$\Delta \nu = p_{\theta} \Delta p_{\theta} / \nu m_0^2 c^2 + p_z \Delta p_z / \nu m_0^2 c^2 \quad (37)$$

可改写成(只保留不稳定项)

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{c^2} - k_{\parallel}^2 - k_c^2 = & \frac{-\beta_{\perp}^2 \nu N_e e^2 J_1^2(k_c r_c) J_1^2(k_c R_0) (\omega l \omega_c - k_{\parallel}^2 c^2)}{4\pi \epsilon_0 k_{\parallel} \omega c^2 R_W^2 J_0^2(k_c R_W) \Delta p_z \Delta \nu} \\ & \cdot \ln \frac{\Omega_l^2 - \left(\frac{k_{\parallel} \Delta p_z}{\nu m_0} - \omega \Delta \nu \right)^2}{\Omega_l^2 - \left(\frac{k_{\parallel} \Delta p_z}{\nu m_0} + \omega \Delta \nu \right)^2}. \quad (38) \end{aligned}$$

(38)式与文献[13]所得结果, 即

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{c^2} - k_{\parallel}^2 - k_c^2 = & \frac{-\beta_{\perp}^2 \nu N_e e^2 J_1^2(k_c r_c) J_1^2(k_c R_0) (\omega^2 - k_{\parallel}^2 c^2)}{4\pi \epsilon_0 k_{\parallel} \omega c^2 R_W^2 J_0^2(k_c R_W) \Delta p_z \Delta \nu} \\ & \cdot \ln \frac{\Omega_l^2 - \left(\frac{k_{\parallel} \Delta p_z}{\nu m_0} - \frac{\omega \Delta \nu}{\nu} \right)^2}{\Omega_l^2 - \left(\frac{k_{\parallel} \Delta p_z}{\nu m_0} + \frac{\omega \Delta \nu}{\nu} \right)^2} \end{aligned}$$

几乎完全相同(后者只研究了 TEon 模)。

四、不稳定分析

由(35)式可得取最大增长率的条件为

$$\left. \begin{aligned} \omega - k_{\parallel} v_z - l\omega_c &= 0 \\ \omega^2 - k_{\parallel}^2 c^2 - k_c^2 c^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

因此可得

$$v_g = \frac{c^2 k_{\parallel}}{\omega} \approx v_z, \quad (40)$$

v_g 为电磁波的群速。(40)式说明,为得到最大增长率,应取电磁波的群速等于电子注的纵向速度。由(39)、(40)式可解出增长率取最大值时参量之间的关系式

$$\omega = l\omega_c / (1 - v_z^2/c^2) = l\omega_c v_{\parallel}^2, \quad (41)$$

$$k_{\parallel} = \omega v_z / c^2, \quad (42)$$

$$k_c = l\omega_c v_{\parallel} / c, \quad (43)$$

$$R_W = \alpha_{mn} c / l\omega_c v_{\parallel}. \quad (44)$$

(41)式说明,当增长率取最大值时,电磁波的频率接近且略大于同步迴旋谐波频率。将(41)–(44)式代入(35)式可得取最大增长率时的色散方程

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{c^2} - k_{\parallel}^2 - k_c^2 &= \frac{\omega_p^2 W_{mnl}}{\nu c^2} \left\{ \frac{2\nu m_0^2 c^2}{2m_0^2 c^2 + p_{\theta 0}^2} \right. \\ &+ \frac{\omega - k_{\parallel} v_z}{\Omega_i} - \frac{m_0 c \beta_{\perp} \nu^2 k_c^2 c^2}{4\omega k_{\parallel} \nu^2 \Delta p_z \Delta p_{\theta}} \\ &\cdot \ln \frac{\Omega_i^2 - \left[\left(\frac{\omega v_z}{m_0 c^2} - \frac{k_{\parallel}}{\nu m_0} \right) \Delta p_z + \frac{\omega v_{\theta}}{m_0 c^2} \Delta p_{\theta} \right]^2}{\Omega_i^2 - \left[\left(\frac{\omega v_z}{m_0 c^2} + \frac{k_{\parallel}}{\nu m_0} \right) \Delta p_z + \frac{\omega v_{\theta}}{m_0 c^2} \Delta p_{\theta} \right]^2} \left. \right\}. \end{aligned} \quad (45)$$

为了着重分析横向动量离散的影响,令 $\Delta p_z \rightarrow 0$, $\Delta p_{\theta} \neq 0$, 于是由(45)式可得

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{c^2} - k_{\parallel}^2 - k_c^2 &= \frac{\omega_p^2 W_{mnl}}{\nu c^2} \left\{ \frac{2\nu m_0^2 c^2}{2m_0^2 c^2 + p_{\theta 0}^2} \right. \\ &+ \frac{\omega - k_{\parallel} v_z}{\Omega_i} - \frac{\nu \beta_{\perp}^2 k_c^2 c^2 / \nu_{\parallel}^2}{\Omega_i^2 - \left(\frac{\omega v_{\theta}}{m_0 c^2} \Delta p_{\theta} \right)^2} \left. \right\}. \end{aligned} \quad (46)$$

令电磁波频率在谐振频率 $l\omega_c \nu_{\parallel}^2$ 附近,利用(39)、(41)–(44)式,可从(46)式解出色散关系(忽略稳定项)

$$\chi^3 - \eta^2 \chi + \frac{lW_{mnl} \omega_p^2 \beta_{\perp}^2}{2\omega_c^2 \nu_{\parallel}^2} = 0, \quad (47)$$

$\lambda = \Omega_i / \omega_c$ 为归一化多普勒频移, η 为

$$\eta = \frac{\omega v_{\theta} \Delta p_{\theta}}{\omega_c m_0 c^2}. \quad (48)$$

由(47)式可得 χ 具有虚数根的充分必要条件为

$$\frac{\omega v_{\theta} \Delta p_{\theta}}{m_0 c^2 l \omega_c} < \sqrt{3} \left\{ \frac{R_0 a \omega_p^2 \beta_{\perp}^2 J_1^2(k_c a) J_{m-1}^2(k_c R_0)}{c^2 (\alpha_{mn}^2 - m^2) J_m^2(k_c R_w)} \right\}^{1/3}. \quad (49)$$

(49)式说明 β_{\perp} 存在一个临界值 $\beta_{\perp c}$, 要求 $\beta_{\perp} > \beta_{\perp c}$ 方能保证具有 ECRM 不稳定性. 此外, (49)式还表明 Δp_{θ} 在给定的参量下也存在临界值 $\Delta p_{\theta c}$, 要求

$$\Delta p_{\theta} < \Delta p_{\theta c} = \frac{\sqrt{3} m_0 c^2 l \omega_c}{\omega v_{\theta}} \left\{ \frac{R_0 a \omega_p^2 \beta_{\perp}^2 J_1^2(k_c a) J_{m-1}^2(k_c R_0)}{c^2 (\alpha_{mn}^2 - m^2) J_m^2(k_c R_w)} \right\}^{1/3}. \quad (50)$$

由(47)式可解出归一化增长率及归一化频移分别为

$$I_m \left(\frac{\delta \omega}{\omega_c} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left\{ \sqrt{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \right\}, \quad (51)$$

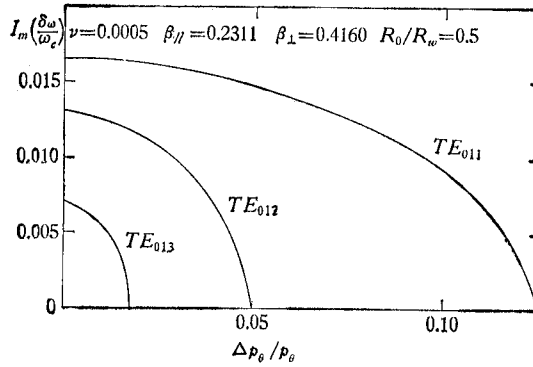


图 2 $I_m \left(\frac{\delta \omega}{\omega_c} \right) - \frac{\Delta p_{\theta}}{p_{\theta}}$ 曲线

Fig. 2 $I_m \left(\frac{\delta \omega}{\omega_c} \right) - \frac{\Delta p_{\theta}}{p_{\theta}}$ curves

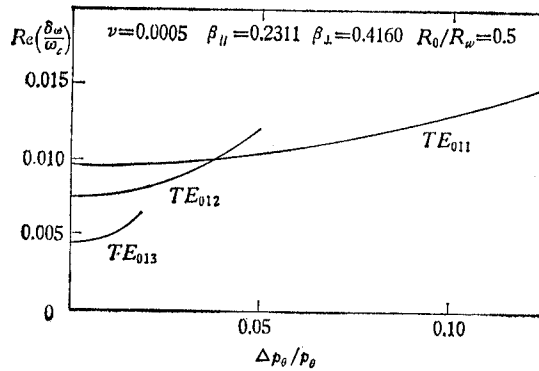


图 3 $R_e \left(\frac{\delta \omega}{\omega_c} \right) - \frac{\Delta p_{\theta}}{p_{\theta}}$ 曲线

Fig. 3 $R_e \left(\frac{\delta \omega}{\omega_c} \right) - \frac{\Delta p_{\theta}}{p_{\theta}}$ curves

$$R_e \left(\frac{\delta\omega}{\omega_c} \right) = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \right\}, \quad (52)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} p &= -\eta^2, \\ q &= \frac{lW_{mn}l\omega_p^2\beta_{\perp}^2}{2\omega_c^2\nu_{\parallel}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

以下根据(51)、(52)式,就一些典型的实验数据进行计算分析。并取 $\nu = 0.0005$ (此处 Budker 参量 ν 采用高斯单位制), $\beta_{\parallel} = v_x/c = 0.2311$, $\beta_{\perp} = v_{\theta}/c = 0.4160$ 。

图 2 和图 3 示出了横向动量离散对归一化增长率及归一化频移的影响 (选取 $R_0/R_w = 0.5$)。从图中可得到几点明显结论: (1)随着 $\Delta p_{\theta}/p_{\theta}$ 的增大,归一化增长率将单调下

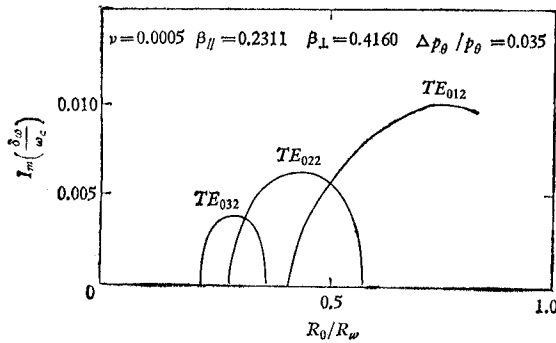


图 4 $I_m \left(\frac{\delta\omega}{\omega_c} \right) - \frac{R_0}{R_w}$ 曲线

Fig. 4 $I_m \left(\frac{\delta\omega}{\omega_c} \right) - \frac{R_0}{R_w}$ curves

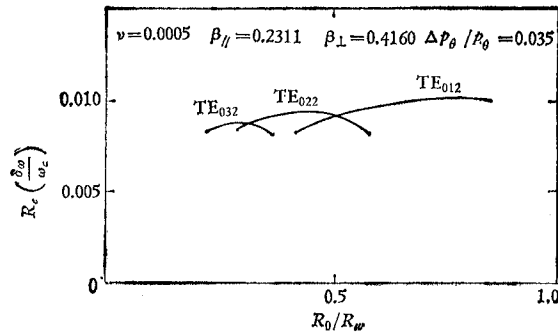


图 5 $R_e \left(\frac{\delta\omega}{\omega_c} \right) - \frac{R_0}{R_w}$ 曲线

Fig. 5 $R_e \left(\frac{\delta\omega}{\omega_c} \right) - \frac{R_0}{R_w}$ curves

降;当 $\Delta p_\theta/p_\theta$ 增加到临界值时,迴旋脉塞效应消失。(2)随着使用的迴旋谐波次数升高,对应的 $\Delta p_\theta/p_\theta$ 临界值将下降。这表明使用高次迴旋谐波对动量离散的要求更为苛刻。(3)在相同动量离散的情况下,所使用的迴旋谐波次数越高,得到的增长率越低。(4)归一化频移是 $\Delta p_\theta/p_\theta$ 的增函数。

图 4 和图 5 示出了考虑动量离散时 R_0/R_w 对归一化增长率及归一化频移的影响。此处选取 $\Delta p_\theta/p_\theta = 0.035$, $\nu, \beta_{\parallel}, \beta_{\perp}$ 同前。由图可得如下结论:(1)有动量离散后 R_0/R_w 不能随意取值,而被限制在一定范围内方能产生迴旋脉塞效应。例如,对于 $TE_{01,2}$ 要求 $R_0/R_w > 0.42$ 。对于 $TE_{02,2}$ 要求 $0.28 < R_0/R_w < 0.58$ 。对于 $TE_{03,2}$ 要求 $0.22 < R_0/R_w < 0.37$ 。(2) R_0/R_w 对归一化增长率影响十分敏感,应根据需要适当选取此值。(3)对于 $TE_{01,2}, TE_{02,2}, TE_{03,2}$, R_0/R_w 存在不同的最佳值,使归一化增长率最大(这时频移也最大)。从图 4 可知,这些最佳值分别为 0.75—0.80, 0.43—0.45 和 0.3。

五、结 束 语

本文求得了电子迴旋谐振脉塞的扰动分布函数的普遍表达式((24)式),求得了同时考虑横向及纵向动量离散时 TE_{mn} 模的任意次迴旋谐波与电子注相互作用的色散方程((35)式)以及简化后的色散关系((47)式),并据此对动量离散的影响进行了详细的分析讨论。由于电子注与波的相互作用主要靠电子的横向能量与波发生交换,因此,本文所得到的(47)、(50)式,将有助于进一步建立动量离散引起的饱和机理。

本文在写作过程中曾得到刘盛纲教授的指教和莫元龙同志的有益讨论,在此一并表示衷心的感谢。

附录: 平衡态电子的运动常数

平衡态电子运动如图 1 所示。矢势 \mathbf{A} 可写作

$$\mathbf{A} = \frac{B_0 R}{2} \mathbf{e}_\varphi. \quad (\text{A-1})$$

拉格朗日函数 L 为

$$L = -\frac{m_0 c^2}{\nu} - \frac{1}{2} e B_0 R^2 \dot{\varphi}. \quad (\text{A-2})$$

由此得广义动量及哈密顿函数为

$$P_R = \nu m_0 \dot{R} = p_R, \quad (\text{A-3})$$

$$P_z = \nu m_0 \dot{z} = p_z, \quad (\text{A-4})$$

$$P_\varphi = \nu m_0 R^2 \dot{\varphi} - \frac{1}{2} e B_0 R^2 = p_\varphi R - \frac{1}{2} e B_0 R^2, \quad (\text{A-5})$$

$$H = \nu m_0 c^2 = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 \left[P_R^2 + \left(P_\varphi / R + \frac{1}{2} e B_0 R \right)^2 + P_z^2 \right]}, \quad (\text{A-6})$$

$$\text{其中 } \nu = [1 - (\dot{R}^2 + R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2)/c^2]^{-\frac{1}{2}} = [1 - (\nu_\theta^2 + \nu_z^2)/c^2]^{-\frac{1}{2}}, \quad (\text{A-6})$$

式中 p_R 、 p_ϕ 、 p_z 为相应的普通力学动量。由 (A-6) 代入正则方程, 得

$$\dot{R} = \frac{P_R}{\nu m_0}, \quad (\text{A-7})$$

$$\dot{\phi} = \frac{\left(P_\phi + \frac{1}{2} e B_0 R^2\right)}{\nu m_0 R^2}, \quad (\text{A-8})$$

$$\dot{z} = \frac{P_z}{\nu m_0}, \quad (\text{A-9})$$

$$\dot{P}_R = \frac{\left(\frac{P_\phi^2}{R^3} - \frac{e^2 B_0^2 R}{4}\right)}{\nu m_0}, \quad (\text{A-10})$$

$$\dot{P}_\phi = 0, \quad (\text{A-11})$$

$$\dot{P}_z = 0. \quad (\text{A-12})$$

注意到

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \quad (\text{A-13})$$

将 (A-2) 式代入 (A-13) 式得 $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, 即首先可定出 H 为运动常数:

$$H = c'_1. \quad (\text{A-14})$$

将 (A-6) 式代入 (A-14) 式, 得知 ν 亦为运动常数, 记作

$$\nu = c_1 \quad (= c'_1/m_0 c^2). \quad (\text{A-15})$$

由 (A-11)、(A-12) 式得 P_ϕ 、 P_z 为运动常数, 记作

$$P_\phi = c_2, \quad (\text{A-16})$$

$$P_z = c_3. \quad (\text{A-17})$$

(A-15)–(A-17) 式代入 (A-7)–(A-10) 式可解出电子的运动方程

$$\begin{cases} z = \frac{c_3}{c_1 m_0} t + c_4, \end{cases} \quad (\text{A-18})$$

$$R = \left\{ \frac{2\sqrt{c_5^2 c_1^4 m_0^4 - c_2^2 e^2 B_0^2}}{e^2 B_0^2} \sin\left(\frac{e B_0}{c_1 m_0} t + \frac{e B_0}{c_1 m_0} c_6\right) + \frac{2c_5 c_1^2 m_0^2}{e^2 B_0^2} \right\}^{1/2}, \quad (\text{A-19})$$

$$\varphi = c'_7 + \frac{e B_0}{2c_1 m_0} t + \text{arctg} \left\{ \frac{c_5 c_1^2 m_0^2}{c_2 e B_0} \text{tg} \frac{e B_0 (t + c_6)}{2c_1 m_0} + \frac{\sqrt{c_5^2 c_1^4 m_0^4 - c_2^2 e^2 B_0^2}}{c_2 e B_0} \right\}, \quad (\text{A-20})$$

$$\dot{z} = \frac{c_3}{c_1 m_0}, \quad (\text{A-21})$$

$$\dot{R} = \left\{ c_5 - \left(\frac{c_2^2}{R^2} + \frac{1}{4} e^2 B_0^2 R^2 \right) / c_1^2 m_0^2 \right\}^{1/2}, \quad (\text{A-22})$$

$$\dot{\phi} = \frac{c_2}{c_1 m_0 R^2} + \frac{e B_0}{2c_1 m_0}, \quad (\text{A-23})$$

如图 1, 令初始时刻取在 M 点, 则初始条件可写作:

$$\left. \begin{aligned} z = 0 \text{ 时}; R &= R_g + r_c, \quad \varphi = \varphi_g; \\ z &= 0, \quad \dot{R} = 0; \\ \dot{\varphi} &= v_{\theta 0}, \quad \dot{z} = v_{z0}; \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-24})$$

式中 R_g 、 φ_g 为迴旋中心在波导轴坐标系中的坐标, r_c 为拉莫尔半径. 将 (A-24) 式代入 (A-18)–(A-23), 可定出积分常数

$$c_4 = 0, \quad (\text{A-25})$$

$$c_5 = \frac{1}{c_1^2 m_0^2} \left[\frac{c_2^2}{(R_g + r_c)^2} + \frac{e^2 B_0^2}{4} (R_g + r_c)^2 \right], \quad (\text{A-26})$$

$$c_6 = \frac{\pi c_1 m_0}{2e B_0}, \quad (\text{A-27})$$

$$c_7' = \varphi_g - \text{arctg} \frac{2c_2}{e B_0 (R_g + r_c)^2}, \quad (\text{A-28})$$

其中 R_g 和 r_c 由图中几何关系可得

$$R_g = \frac{\sqrt{m_0^2 c^2 (c_1^2 - 1) - c_3^2 - 2e B_0 c_2}}{e B_0}, \quad (\text{A-29})$$

$$r_c = \frac{\sqrt{m_0^2 c^2 (c_1^2 - 1) - c_3^2}}{e B_0}. \quad (\text{A-30})$$

将 (A-29)、(A-30) 式代入 (A-26) 式得知: c_6 以及 c_5 均可由 c_1 、 c_2 、 c_3 表示. 因此, 上述 7 个积分常数中只有 4 个不是零, 且是彼此独立的. 令

$$c_7 = c_7' + \text{arctg} \frac{2c_2}{e B_0 (R_g + r_c)^2},$$

则

$$c_7 = \varphi_g. \quad (\text{A-31})$$

由此可见, 平衡态电子存在 4 个非零的彼此独立的运动常数, 它们是: ν , P_φ , P_z , φ_g . 通过 (A-6)' 式及 (29) 式, 可以换写成 p_θ , p_z , R_g , φ_g .

作为特例, 当电子注具有轴对称性时, 可选取迴旋中心在 OX 轴上的特殊电子作为代表, 这时 $\varphi_g = 0$. 因此, 对轴对称电子注, 平衡态电子的非零且彼此独立的运动常数就只有 3 个, 即 p_θ , p_z , R_g .

从上面所得结论可知, 当研究非旋转对称性波导脉塞(如平行板波导脉塞)时, 平衡分布函数的完整形式应该是 $f_0(p_\theta, p_z, R_g, \varphi_g)$.

参 考 文 献

- [1] V. A. Flyagin, et al., *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-25**(1977), 514.
- [2] J. L. Hirshfield and V. A. Granatstein, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-25**(1977), 522.
- [3] H. S. Uhm, R. C. Davidson and K. R. Chu, *Phys. Fluids* **21**(1978), 1866.
- [4] R. A. Waldron, *Theory of Guided Electromagnetic Waves*, Van Nostrand-Reinhold, London, 1970.
- [5] 王竹溪、郭敦仁, 特殊函数概论, 第一版, 科学出版社, 1965.
- [6] N. A. Krall and A. W. Trivelpiece, *Principles of Plasma Physics*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1973.
- [7] O. Dolehler, et al., *IEEE Trans. on ED*, **ED-26**(1979), 1655.

- [8] Liu Sheng-gang, *The Fifth International Conference on IR/mm Waves*, FRG, 1980, 354.
[9] 张世昌, 考虑动量离散的圆波导电子回旋谐振脉塞的动力学理论, 成都电讯工程学院校庆学术论文集, 1981.
[10] I. I. Antakov, et al., *Radiophysics and Quantum Electronics*, **20**(1977), 413.
[11] M. J. LightHill, *An Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions*, Cambridge University Press, 1958.
[12] Liu Sheng-gang, *Scientific Sinica*, **21**(1979), 901.
[13] H. S. Uhm and R. C. Davidson, *Phys. Fluids*, **22**(1979), 1084.

THEORY OF MOMENTUM SPREADS IN ELECTRON CYCLOTRON RESONANCE MASER

Zhang Shichang

(*Department of Radio Engineering, Guilin Institute of Electronic Technology*)

This paper investigates the influence of transverse and axial momentum spreads on Electron Cyclotron Resonance Maser (ECRM), and gives the general expression of the perturbed distribution function and the dispersion equation for the interaction between $TE_{m,n,l}$ mode and electron beam.

As two special examples, when $\Delta p_\theta \rightarrow 0$ and $\Delta p_z \rightarrow 0$ or $m = 0$ the results of this paper are identical with related references.