

高动态多普勒频率估计及其 Cramer-Rao 界¹

王晓湘

(北京邮电大学信息工程系 北京 100876)

摘要: 用泰勒级数展开的形式表示高动态的多普勒频率参数, 推导分析了对各阶频率参数估计的最大似然估计器 (MLE) 及其估计误差的 Cramer Rao 界; 描述了最大似然估计器和扩展卡尔曼滤波器 (EKF) 对各阶频率参数的估计模型; 并以均方根估计误差和失锁概率为性能指标, 通过对同一模拟的接收机高动态轨迹的跟踪估计, 比较了两种不同估计技术的基本性能。

关键词: 最大似然估计器 (MLE), 扩展卡尔曼滤波器 (EKF), Cramer Rao 界, 均方根估计误差, 失锁概率

中图分类号: TN911.23 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-5896(2004)02-0206-07

Estimation of High Dynamic Doppler Frequency and Its Cramer-Rao Bounds

Wang Xiao-xiang

(Dept. of Info. Eng., Beijing Univ. of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China)

Abstract The Doppler frequency of received signal is calculated by a Taylor series, the Cramer-Rao bounds on the estimation error is Derived and analyzed; The estimation techniques as Maximum Likelihood Estimator(MLE) and Extended Kalman Filter(EKF) are compared; Their basic frequency error performance and probability of loss-of-lock at various signal-to-noise ratios is compared by tracking a common simulated high-dynamic trajectory.

Key words Maximum Likelihood Estimator(MLE), Extended Kalman filter, Cramer-Rao bound, RMS estimation error, Probability of loss-of-lock

1 引言

直序扩频系统以其众多的优点被广泛应用于军事和民用领域。以 GPS(全球定位系统) 为例, 当 GPS 接收机应用于飞行器或导弹等高动态载体时, 其信噪比情况往往比较差。若根据这时的信噪比情况分析, 要想采用普通的 GPS 接收机实现可靠的载波相位跟踪, 要求载体的加速度不得超过 5g(g 为重力加速度), 加速度的变化率不得超过 5g/s。因此在信噪比情况很差的场合, 为实现高精度动态跟踪, 可考虑二阶以上的多普勒频率成分的影响, 用泰勒级数展开的形式表示多普勒频率参数, 同时估计各阶多普勒频率的变化。

在数据码的调制已知且已从接收信号中解调, 经解扩和数据码解调的正弦载波信号的频率随接收机的动态变化而变化。假设在没有噪声的情况下, 经数据解调后的信号为

$$s(t) = R_e\{\sqrt{2}\bar{s}(t)e^{j\omega_L t}\}, \quad \bar{s}(t) = Ae^{j\theta(t)} \quad (1)$$

其中 $\bar{s}(t)$ 为信号的复包络, A 为其幅度, $\omega_L = 2\pi f_L$, 其中相位过程 $\theta(t)$ 被定义为多普勒频率 $\omega_d(t)$ 的如下积分形式: $\theta(t) = \int_0^t \omega_d(\xi)d\xi$ 。

¹ 2002-11-03 收到, 2003-07-15 改回

多普勒频率过程 (假定其所有的 k 阶变化率都存在) 可被表达为 t_0 附近的泰勒级数展开形式如下:

$$f_d(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \frac{(t-t_0)^k}{k!}$$

$$f_k = \left. \frac{\partial^k f_d(t)}{\partial t^k} \right|_{t=t_0} \quad (2)$$

在 $t_0 = 0$ 附近展开表示的观测区间载波相位:

$$\theta(t) = \theta_0 + 2\pi \left[f_0 t + \frac{f_1}{2} t^2 + \frac{f_2}{6} t^3 \right]$$

$$= \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\omega_1}{2} t^2 + \frac{\omega_2}{6} t^3 \quad (3)$$

其中参数 f_0 表示多普勒频率 (单位: 赫), f_1 为其一阶变化率 (单位: 赫 / 秒), f_2 代表其二阶变化率 (单位: 赫 / 秒²). $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ 为角频率, 分别与实际接收机的动态速度, 加速度和加速度的变化率有关, 可用矢量法表示为: $\omega = [\omega_0, \omega_1, \omega_2]^T$.

天线接收的信号被接收机的动态参数所调制, 且受到零均值、平稳、窄带高斯噪声 $n(t)$ 的干扰:

$$n(t) = \text{Re}\{\sqrt{2}\tilde{n}(t)e^{j\omega_L t}\} \quad (4)$$

其中 $\tilde{n}(t)$ 为窄带噪声过程的复包络。假定已经通过将接收的信号与在载波频率上的正弦波相混频的方式将载频去掉, 并得到了同相和正交信号。一般地, 同相和正交信号被以很高的采样频率采样后, 接着被输入到数字积累器。在不考虑积累器的幅度损失的情况下, 积累器的输出即为同相 (I) 和正交 (Q) 信号的采样^[1]:

$$\left. \begin{aligned} I_i &= A \cos(\theta_i) + n_{I_i} \\ Q_i &= A \sin(\theta_i) + n_{Q_i} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中 A 为接收信号的幅度, θ_i 为以采样周期 T_s 采样的信号载波相位, 采样周期等于载波跟踪环路的更新间隔, $T_s = 2\text{ms}$, n_{I_i}, n_{Q_i} 为方差为 $\sigma_n^2 = N_0/2T_s$ 的加性白噪声的采样。相应的接收机输入 SNR 为 $S/N = A^2/\sigma_n^2 = 2A^2T_s/N_0(\text{dB})$ 。

2 MLE 估计算法

信号参数的最大似然估计是那些同时使观测时间内信号序列对信号参数的条件联合概率密度为最大的参数值。如果信号参数在某一不确定范围内的统计分布未知, 那么 MLE 是最优的估计器, 其估计方差趋于 Cramer Rao 界。

将接收信号的采样形式写为

$$\tilde{r}_i = \tilde{s} + \tilde{n}_i = A e^{j\theta_0} e^{jg_i(\omega)} + \tilde{n}_i, \quad g_i(\omega) = \omega_0 t_i + h_i(\omega_1, \omega_2)$$

$$h_i(\omega_1, \omega_2) = \frac{\omega_1}{2} t_i^2 + \frac{\omega_2}{6} t_i^3$$

则三维的 MLE 形式如下^[2]:

$$L(\omega) = L(\omega_0, \omega_1, \omega_2) = \left| \sum_{i=1}^N \tilde{z}_i e^{j\omega_0 n T_s} \right|^2, \quad n = i + \frac{1}{2} \quad (6)$$

其中 $\tilde{z}_i = \tilde{r}_i \exp[-jh_i(\omega_1, \omega_2)]$ 为修正的采样序列, A 为接收信号的幅度, T_s 为采样周期等于载波跟踪环路的更新间隔。其中 \tilde{z}_i 包含需要估计的参数 ω_1, ω_2 。对多普勒频率及其各阶导数的最大似然估计为同时使似然函数 $L(\omega_0, \omega_1, \omega_2)$ 取最大的值, 求极值的运算可采用 FFT 算法实现。该 MLE 的复杂程度取决于多普勒频率的泰勒级数展开式中有效项的个数, 而后者又取决于接收机的动态轨迹, 因此高阶 MLE 的复杂程度取决于接收机的动态。

3 EKF 算法

采用矢量表示法表示采样信号, $r(k) = \begin{bmatrix} A \sin(\theta(k)) \\ A \cos(\theta(k)) \end{bmatrix} + n(k)$, 可写出系统的状态转移矩阵 ϕ 和噪声干扰矢量的协方差矩阵 Q ^[3]:

$$\phi = \begin{bmatrix} 1 & T_s & T_s^2/2 & T_s^3/6 \\ 0 & 1 & T_s & T_s^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & T_s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = N_y T_s \begin{bmatrix} T_s^6/252 & T_s^5/72 & T_s^4/30 & T_s^3/24 \\ T_s^5/72 & T_s^4/20 & T_s^3/8 & T_s^2/6 \\ T_s^4/30 & T_s^3/8 & T_s^2/3 & T_s/2 \\ T_s^3/24 & T_s^2/6 & T_s/2 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

从而, 用上标“+”和“-”分别指状态及方差的估计和预测, 对状态矢量 $x(k)$ 的 EKF 估计过程如下^[4]:

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}_k^+ &= \hat{x}_k^- + K(k)[r(k) - h(\hat{x}_k^-)], & \hat{x}_{k+1}^- &= \phi \hat{x}_k^+ \\ \sigma_k &= H_k^T P_k^- H_k + R_n \\ K_k &= P_k^- H_k \sigma_k^{-1} \\ P_k^+ &= P_k^- - P_k^- H_k [H_k^T P_k^- H_k + R]^{-1} H_k^T P_k^-, & P_{k+1}^- &= \lambda^2 \phi P_k^+ \phi^T + Q \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

其中 $R_n = \sigma_n^2 I$ 为观测模型噪声; K_k 为滤波增益, λ 为某一大于 1 的数据加权系数, 被用于调节过去的数据的权重以加快滤波器对瞬态的响应速度; H_k^T 是函数 $h(x(k))$ 的线性因子, 即

$$H_k^T = \frac{\partial}{\partial x} h(x)|_{x=x_k^-} = \begin{bmatrix} \cos \hat{\theta}_k^- \\ -\sin \hat{\theta}_k^- \end{bmatrix} l^T, \quad \text{其中 } h(x)|_{x=x(k)} = \begin{bmatrix} \sin(l^T x(k)) \\ \cos(l^T x(k)) \end{bmatrix}$$

4 估计方差的 Cramer-Rao 界

由式 (5) 可写出下面的同相和正交观测序列:

$$r_1(k) = A \cos(\theta_0 + \omega_0 t_k + \beta_0 t_k^2) + n_1(k) = I(k) + n_1(k) \quad (9a)$$

$$r_2(k) = A \sin(\theta_0 + \omega_0 t_k + \beta_0 t_k^2) + n_2(k) = Q(k) + n_2(k) \quad (9b)$$

$$t_k = t_0 + kT_s = (n_0 + k)T_s; \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

其中 $r_1(k)$, $r_2(k)$ 是由 $t = t_0$ 时刻开始以 T_s 为采样周期得到的采样序列, n_0 为信号采样序列起始采样值的序号。 $n_1(k), n_2(k)$ 是噪声矢量的同相和正交分量。

记未知的参数矢量为 $\alpha = (\beta_0 \omega_0 \theta_0)^T$, 则观测序列可记为 $R_k = \{r(k), 0 \leq k \leq N-1\}$, 其中 $r(k) = [r_1(k), r_2(k)]^T$ 。记 R_k 对 α 的条件概率密度函数为 $f(R_k|\alpha)$ 为^[5]

$$f(R_k|\alpha) = \left[\frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \right]^N \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{k=0}^{N-1} [r_1(k) - I_k]^2 + [r_2(k) - Q_k]^2 \right\} \quad (10)$$

因此, 有 Fisher 信息矩阵 J 的第 i, j 个元素为

$$J_{ij} = E \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_i} f(R_k | \alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha_j} f(R_k | \alpha) \right\} = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \frac{\partial I_k}{\partial \alpha_i} \frac{\partial I_k}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial Q_k}{\partial \alpha_i} \frac{\partial Q_k}{\partial \alpha_j} \right\} \quad (11)$$

下标 i, j 只代表 α 中的未知元素.

由 Cramer-Rao 约束定理, 任何无偏估计的方差不小于信息矩阵的逆矩阵之对角元素的值. 在 $n_0 = 0$ 的特殊情况下, 经推导可得到

$$J = \frac{A^2}{\sigma_n^2} J_N = \frac{A^2}{\sigma_n^2} \begin{bmatrix} T_s^4 S & T_s^3 R & T_s^2 Q \\ T_s^3 R & T_s^2 Q & T_s P \\ T_s^2 Q & T_s P & N \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} |J| &= \frac{A^2 T_s^6}{\sigma_n^2} (SQN + 2QPR - Q^3 - P^2 S - R^2 N) \\ &= \frac{A^2 T_s^6}{\sigma_n^2} \frac{N^3 (N^2 - 4)(N^2 - 1)^2}{2160} \end{aligned} \quad (13)$$

上式得到了对所有未知的参数 $\beta_0, \omega_0, \theta_0$ 组合成的信息矩阵 J . 当未知参数的个数减小时, J 的维数也随之降低. 例如, 当 θ_0 已知时, 则对应的信息矩阵 J 可通过将式 (12) 矩阵的第三行和第三列的元素去掉而得到.

因此, 通过将不同的未知参数对应的信息矩阵求逆, 并代入相应的 P, Q, R, S 值, 可得到下面的估计方差表达式:

$$\text{var}(\beta_0) \geq \begin{cases} \frac{N_0}{2A^2 T_s^5} \frac{30}{N(N-1)(2N-1)(3N^2-3N-1)}, & \omega_0 \text{ 已知, } \theta_0 \text{ 已知} \\ \frac{N_0}{2A^2 T_s^5} \frac{180}{N(8N-11)(2N-1)(N-1)}, & \omega_0 \text{ 已知, } \theta_0 \text{ 未知} \\ \frac{N_0}{2A^2 T_s^5} \frac{120(2N-1)}{N(N-2)(N^2-1)(3N^2-3N+2)}, & \omega_0 \text{ 未知, } \theta_0 \text{ 已知} \\ \frac{N_0}{2A^2 T_s^5} \frac{180}{N(N^2-1)(N^2-4)}, & \omega_0 \text{ 未知, } \theta_0 \text{ 未知} \end{cases} \quad (14a)$$

$$\text{var}(\omega_0) \geq \begin{cases} \frac{N_0}{2A^2 T_s^3} \frac{6}{N(N-1)(2N-1)}, & \beta_0 \text{ 已知, } \theta_0 \text{ 已知} \\ \frac{N_0}{2A^2 T_s^3} \frac{12}{N(N^2-1)}, & \beta_0 \text{ 已知, } \theta_0 \text{ 未知} \\ \frac{N_0}{2A^2 T_s^3} \frac{24(2N-1)(3N^2-3N-1)}{N(N-1)(3N^4-6N^3-N^2+4N-4)}, & \beta_0 \text{ 未知, } \theta_0 \text{ 已知} \\ \frac{N_0}{2A^2 T_s^3} \frac{12 \cdot (2N-1)(8N-11)}{N(N^2-1)(N^2-4)}, & \beta_0 \text{ 未知, } \theta_0 \text{ 未知} \end{cases} \quad (14b)$$

$$\text{var}(\theta_0) \geq \begin{cases} \frac{N_0}{2A^2T_s} \frac{1}{N}, & \beta_0 \text{ 已知}, \omega_0 \text{ 已知} \\ \frac{N_0}{2A^2T_s} \frac{2(2N-1)}{N(N+1)}, & \beta_0 \text{ 已知}, \omega_0 \text{ 未知} \\ \frac{N_0}{2A^2T_s} \frac{6(3N^2-3N-1)}{N(8N^2-3N-11)}, & \beta_0 \text{ 未知}, \omega_0 \text{ 已知} \\ \frac{N_0}{2A^2T_s} \frac{3(3N^2-3N+2)}{N(N+1)(N+2)}, & \beta_0 \text{ 未知}, \omega_0 \text{ 未知} \end{cases} \quad (14c)$$

5 计算机模拟与分析

计算机模拟的接收机速度轨迹见图 1(a)。该模拟的接收机动态含有正的和负的加速度变化率的脉冲，脉冲持续时间为 0.5s，幅度为 100g/s，被持续 2s 的恒加速度所分割，见图 1(b) 虚线，实线表示的是对应的加速度曲线，加速度的初始值被定为 -25g。

模拟时，每一次对 N 个连续采样点进行 FFT，得到的是相应时间段中心时刻的参数估计值。在模拟过程之前，各频率参数的不确定区域及搜索步长是首先需要根据接收机的动态确定的参数。当 $N=50$ 时，意味着每一次 FFT 处理对应的的时间间隔为 $NT_s = 100\text{ms}$ ，由图 1(b) 所示加速度变化率的脉冲大小，可知加速度在 100ms 内的变化范围最大为 $\pm 10\text{g}$ ，对应的频率变化率的范围 f_1 为 $\pm 500\text{Hz/s}$ 。另外，由于采样频率为 500Hz， f_0 的范围为 $f_0 = 500\text{Hz}$ ，又由文献 [4] 中最大似然估计函数的主峰在频率轴上的 $\pm 10\text{Hz}$ 之间，因此在频域采用每 2Hz 采样的分辨率可以充分恢复主峰，因此采用 256 点的 FFT 可以实现频域上的充分采样。考察图 1(a) 可见，速度轨迹可被很好地近似为在 0.1s 的时间间隔内的一些线性模型的集合，即使在加速度变化率的脉冲为 100g/s 的情况时也是如此。这一点是降低所模拟的 MLE 复杂度的基础，MLE 的前提正是假定在一相当短的时间间隔内多普勒频率可被视为常数。在模拟中，假定频率的二阶导数为零，对 MLE 的估计性能影响不大。所以下给出的结果只是对 $f_1 = 2\pi\omega_1$ 在其不确定范围内搜索的结果。图 2 给出了 MLE 对频率和频率变化率的均方根误差结果。图 3 给出了 EKF 对相位，频率，频率一阶变化率和二阶变化率估计的均方根误差随信噪比变化的关系曲线。

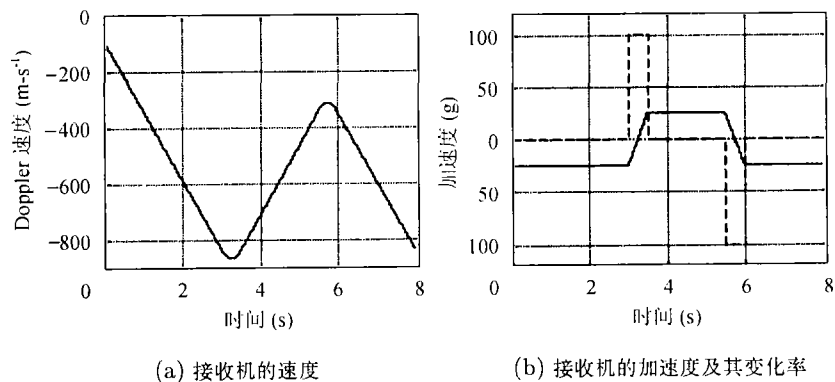


图 1 计算机模拟的接收机动态

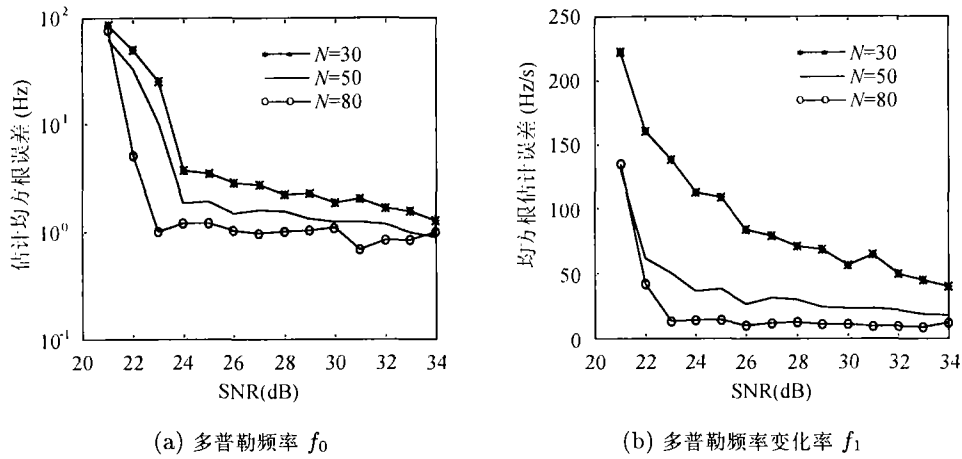


图 2 MLE 的均方根估计误差与信噪比的关系

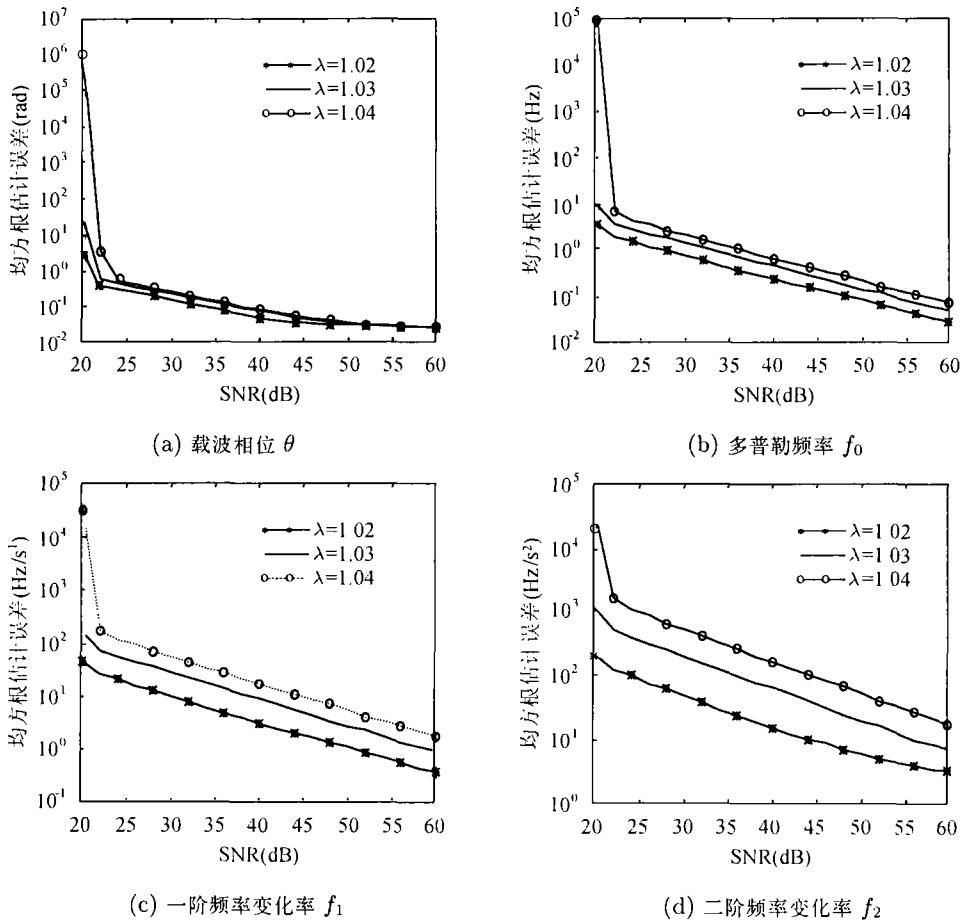
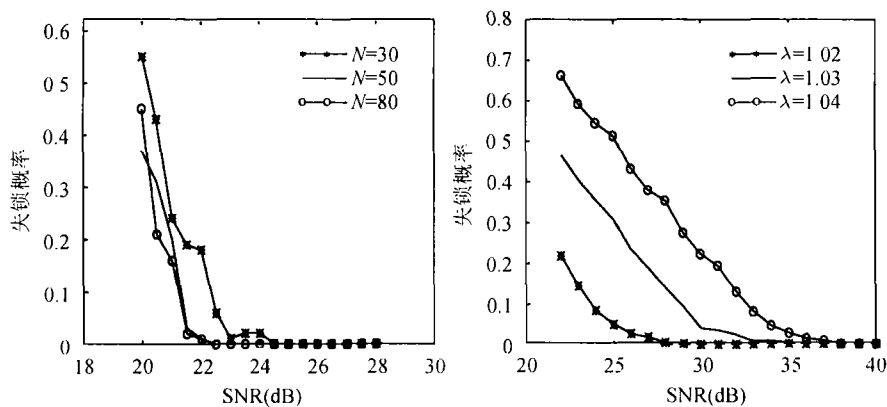


图 3 EKF 的均方根估计误差与信噪比的关系

图 4(a), 4(b) 分别给出了 MLE 和四阶 EKF 对频率估计的失锁概率随信噪比变化的曲线。当对瞬时频率的估计误差幅度超过 Nyquist 采样率的一半时, 认为对频率发生失锁。由于采样频率为 500Hz, 对频率失锁发生在瞬时频率的误差超过 $\pm 250\text{Hz}$ 时。定义失锁概率为 10% 的信噪比为门限信噪比。



(a) MLE 对 Doppler 频率的失锁概率

(b) EKF 对 Doppler 频率的失锁概率

图 4 失锁概率与信噪比的关系

6 结论

比较两种方法的实验结果可知, MLE 具有较低的失锁门限 (约 21dB) 和在门限以上的较低的均方根估计误差。尽管 EKF 两个指标均稍差一些, 在其门限 (约 23dB) 附近 EKF 可得到较低的多普勒频率估计误差。在 SNR 为 24dB, MLE 和 EKF 在跟踪上述具有 100g/s 加速度变化率脉冲的接收机动态时, 都可以得到只有几个赫的估计误差。两种算法的估计性能都取决于接收机动态。在实现上, EKF 与 MLE 的主要区别是, EKF 在处理信号每一个采样点后均可提供对参数的估计, 而 MLE 在处理一段采样数据后提供对该时间段内参数平均值的估计。

参 考 文 献

- [1] Hinedi S, Statman J I. Digital accumulators in phase and frequency tracking loops. *IEEE Trans. on AES*, 1990, AES-26(1): 169-180.
- [2] 王晓湘, 柯有安. 高动态多普勒频率的最大似然估计器. 北京邮电大学学报, 2000, 23(1): 61-65.
- [3] 王晓湘, 柯有安. 多普勒频率跟踪的四阶加权扩展卡尔曼滤波器. 北京邮电大学学报, 2001, 24(1): 88-91.
- [4] 宋文尧, 张牙. 卡尔曼滤波. 北京: 科学出版社, 1991.
- [5] Friedlander B. On the Cramer-Rao bound for time delay and doppler estimation. *IEEE Trans. on Information Theory*, 1984, IT-30(30): 575-581.

王晓湘: 女, 1969 年生, 副教授, 主要从事信号处理及移动通信领域的研究.