第13卷 第6期 电子科学学刊 Vol. 13, No. 6
1991年11月 JOURNAL OF ELECTRONICS Nov., 1991

任意无向加权图的K边连通扩充*

孙立山 孙雨耕 杨山
(哈尔滨工业大学,哈尔滨) (天津大学自动化系,天津)

摘要 本文研究了以最小或近似最小权值的边集扩充一个任意无向加权图为K边连通图.文中给出了一个近似算法,为网络的可靠性设计和改建提供了一个新方法.

关键词 K边连通扩充;边交换;边替代

一、前言

对于一个无向加权图 $G_0=(V, E_0)$ 和正整数 K, G_0 的最小K边连通扩充问题定义为:求一个具有最小权值的边集 E',使得 $G=G_0+E'=(V, E_0\cup E')$ 是K边连通图.若图 G_0 中所有可能的边均具有相同的权值,则其连通扩充问题可用有效算法解决[1-4];若 G_0 的各可能边具有不等权值,则其扩充问题属于 NP 完全问题[1]. 1981年,G. N. Frederickson[5] 提出了一个扩充任意加权图为2边连通图的近似算法,并证明该算法的结果小于或等于最优结果的2倍.而对于一般的加权扩充问题尚无人给出研究结果.

本文首先研究了无向加权连通图的K边连通扩充,提出了一个近似算法.该算法有两个主要过程,称之为边交换和边替代.其方法是首先根据文献[4]形成初始K边连通图,然后交替地应用边交换和边替代来迭代改善扩充边集的权值,直到权值不再降低为止.对于非连通图,算法稍做修改仍可应用.

二、基本定义和定理

在图 $G=(V,E)$ 中,V(或 $V(G)$)表示图G的顶点集合,E(或 $E(G)$)表示图G的边集合. $[x,y]_G$ 表示图G中连结x和y两点的并联边集. $V(e)=\{x,y\}$ 表示边e的端点集合. $E(A,B;G)=\{e\in E(G):V(e)\cap A\neq\phi, V(e)\cap B\neq\phi\}$ 表示图G中连结点集A和B的边集. $d(A,B;G)=|E(A,B;G)|$ 表示连结点集A和B的边数. $E(A;G)=E(A,\bar{A};G)$, $d(A;G)=|E(A;G)|$ 为点集A的度,即连结点集A和 $\bar{A}$ 的边数. $N(x;G)=\{y\in V(G):[x,y]_G\in E(G)\}$ 为点x的邻点集.

1990年1月10日收到,1991年7月8日修改定稿.
* 国家自然科学基金资助项目.

一个从点 v_1 到 v_n 的路径 $v_1—v_n$ 是由这样的一系列边$[v_1,v_2],[v_2,v_3],\cdots,[v_{n-1},v_n]$ 组成(其中 $v_1\neq v_2\neq\cdots\neq v_n$)，两条路径 p 与 p' 是边独立的,如果它们不含有相同的边.

$\lambda(x,y;G)=\min\{d(X;G):X\subset V(G)$，且 $x\in X$，$y\in\bar{X}\}$ 表示点 x 和 y 之间的边连通度,它等于分离 x 和 y 所需从 G 中移掉的最少边数. 图 G 的边连通度 $\lambda(G)$ 定义为最小边割所含的边数,即

$$\lambda(G)=\min_{x,y\in V}\lambda(x,y;G).$$

引理 1[6] 设点 $x\neq y\in V(G)$，则点 x 与 y 之间存在 $\lambda(x,y;G)$ 条边独立的 x-y 路.

引理 2[7] 对于无向或有向图中的任意三个相异点 a,b,c，总有

$$\lambda(a,c;G)\geqslant\min\{\lambda(a,b;G),\lambda(b,c;G)\}.$$

引理 3[7] 设 G 为无向图，$d(a;G)\geqslant K$，对所有的 $\{x,\ y\}\in V(G)-a$，均满足 $\lambda(x,y;G)\geqslant K$，则 $\lambda(G)\geqslant K$.

设 $z\in V(G),e\in[z,y]_G$，$e'\in[x,z]G$，且 $x\neq y$. 在图 G 中去掉边 e 和 e' 后在 x 和 y 之间增加一条边 $[x,y]$ 的操作,称为图 G 在 z 点上的一个删除，记为 $G^{ee'}$. 若对所有的 $\{a,b\}\in V(G)-z$，均有 $\lambda(a,b;G^{ee'})=\lambda(a,b;G)$，则称删除 $G^{ee'}$ 是可行的[7].

引理 4[7] 设 G 中 z 点为非割点，$d(z;G)\geqslant 4,|N(z;G)|\geqslant 2$，则 G 在 z 点总存在可行删除.

在连通图 G 中,若对任意两点 a 和 b 之间的最小分离边集 E'，或者 $E'=E(a;G)$，或者 $E'=E(b;G)$. 特殊地,如 $\lambda(a,b;G)=\min\{d(a;G),d(b;G)\}$，则称图 G 是不可压缩的[7].

三、形成初始 K 边连通图

设图 $G^z=(V\cup\{z\},E_0\cup E^z)$，其中 $z\notin V,E^z=E(z;G^z)$，则称 G^z 是 $G_0=(V,E_0)$ 的增广扩充图，z 为增广点，E^z 为增广扩充边集. 若 G^z 除 z 外是 K 边连通的，则称 G^z 是 G_0 的增广 K 扩充图;若同时 $|E^z|$ 是最小的，则称 G^z 是 G_0 的最小增广 K 扩充图.

对 G_0 的最小增广 K 扩充图进行可行删除即可得到 G_0 的最小 K 边连通扩充图[3].

按文献[4]的算法所得到的最小增广 K 扩充图不是唯一的,而且删除也不唯一，即初始图不唯一. 因此，我们的目标是尽可能选择权值较小的初始图. 形成最小增广 K 扩充图的方法是,在 G_0 中加入增广点 z，对于点 $x\in V(G)$，在 x 和 z 之间加 $\max\{K-d(x;G_0),0\}$条边;然后将点集 V 划分成 $V=V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_n$，每个子集 V_i 是 K 边连通的，两个子集之间不是 K 边连通的;在合并过程中,对所有的子集 V_i，若 $d(V_i;G^z)<K$，则在 V_i 内选择一点 x，在 $V-V_i$ 内选择一点 y，使得权值 $f(x,\ y)=\min\limits_{a\in V_i,b\in V-V_i}f(a,b)$，增加 x 和 z 之间的扩充边使得 $d(V_i;G)=K$. 若两个相邻的子集之间已是 K 边连通的,则将这两个子集合成一个新子集.如此重复,直到所有的子集合并成一个子集为止.可

以证明 G^z 是 G_0 的最小增广 K 扩充图[4].

在删除过程中，采用 Mader[7] 的删除法，但用贪婪（greedy）法对其做了修改，使得每次删除后得到的扩充边的权值均为最小或较小. 删除过程如下:

(1) $g \leftarrow G^z$，即 g 作为操作图.

(2) 若 $d(z,g)=4$（或 2），则直接按文献[7]进行可行删除(略). 若 $d(z;g)>4$，当 g 除 z 外是不可压缩图时转(3)，否则，存在一点集 A 使得 $d(A;g)=\lambda(x,y;g), x\in A$, $y\in\bar{A}, |A|\geqslant 2, |\bar{A}|\geqslant 2$，将 g 分解成 $g_a=\beta(A;g)$ 和 $g_{\bar{a}}=\beta(\bar{A};g)$ 两个子图（$g_a=\beta(A;g)$ 是将点集 A 压缩成一点 a 而得到的图）. 不妨设 $z\in\bar{A}$，对子图 g_a 再做同上的检验和分解，直到 g_a 除 z 外是不可压缩图为止. 在 g_a 中，每一结点 $a_i(i=1,2\cdots m-1, a_i\notin V(G_0))$ 对应于图 G^z 中的一个点集 A_i，即将点集 $V(G^z)$ 划分为 m 个子集 A_1, $A_2,\cdots,A_m, z\in A_m$. 以下仍称 g_a 为 g.

(3) 在图 G^z 中选择 z 的一个邻点 x，点 x 到 z 的其它邻点（不包括和 x 在同一点集 A_i 内的点）的权值之和为最小. 令 $a=\tau(x)$ 为图 G^z 中的点 x 对应于图 g 中的点，在图 g 中去掉一条边 $[a,z]$，检查图 g 除 z 外是否是可压缩的.

(a) 图 g 除 z 外是不可压缩的. 则选择一点 $y\in N(z;G^z)$，x 和 y 不在同一点集 $A_i(i\neq m)$ 中，并且权值 $f(x,y)=\min\limits_{x'\in N(z,G^z)} f(x,x')$，转(4).

(b) 图 g 除 z 外是可压缩的. 则检查各点之间的边连通度并求得这样的点集 B: $d(B;g)=\lambda(x,y;g), x\in B, y\in\bar{B}, |B|\geqslant 2, |\bar{B}|\geqslant 2$，并且除点集 $B\cup\{z\}$ 外 g 是不可压缩的. 令 $A=\tau^{-1}(B)$ 为点集 B 对应于图 G^z 中的点集. 设 $x\in A$，在 $\bar{A}$ 中选择一点 $y\in N(z;G^z)$ 并满足权值 $f(x,y)=\min\limits_{x\in\bar{A}, x'\in N(z,G^z)} f(x,x')$，转(4).

(4) 令 $b=\tau(y)$ 为图 G^z 中的点 y 对应于图 g 中的点. 在 g 中去掉边 $[b,z]$，增加边 $[a,b]$. 在 G^z 中去掉边 $[x,z]$ 和 $[z,y]$，增加边 $[x,y]$，转(2).

按以上步骤最终可得到一个初始扩充图.

四、边　交　换

设图 $G=(V,E_0\cup E')$ 是图 $G_0=(V,E_0)$ 的 K 边连通扩充图. 边 $[a,b]$ 和 $[x,y]$ 在 E' 中且 $a\neq b\neq x\neq y$. 在 G 中去掉边 $[a,b]$ 和 $[x,y]$，增加边 $[a,x]$ 和 $[b,y]$ 的操作称为 G 的一个边交换(如图 1 所示). 若 $f(a,x)+f(b,y)<f(a,b)+f(x,y)$，并且边交换后，图 G 的边连通度保持不变，则称这样的边交换是可行的. 显然边交换不改变图 G 中各点的度数和扩充边的数目.

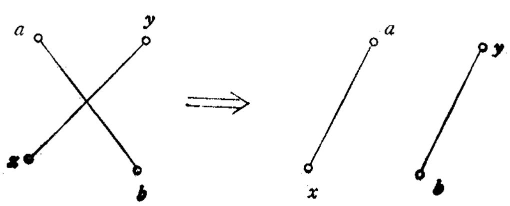

图 1　边交换

引理 5　设 $G=(V, E)$ 是 K 边连通图，G' 是在 G 中去掉边 $[a,b]$ 和 $[x,y]$，增加边 $[a,x]$ 和 $[b,y]$ 后得到的图．若 $\lambda(a,b;G')\geqslant K$，则 G' 也是 K 边连通图．

证明　假设 G' 不是 K 边连通图，则存在一割集 $E(A;G')$ 使得 $d(A;G')<K$．割集 $E(A;G')$ 切割图 G' 有以下几种情况：

(1) A(或 $\bar{A}$) 不含 $\{a,b,x,y\}$；

(2) A(或 $\bar{A}$) 只含 $\{a,b,x,y\}$ 中的一个；

(3) A(或 $\bar{A}$) 包含 $\{a,y\}$；

(4) A(或 $\bar{A}$) 包含 $\{a,b\}$；

(5) A(或 $\bar{A}$) 包含 $\{a,x\}$．

对于前 3 种情况，有 $d(A;G')=d(A;G)$．对于情况(4)有 $d(A;G')=d(A;G)+2$．对情况(5)，有 $d(A;G')=d(A;G)-2$．由于图 G 是 K 边连通的，故 $d(A;G)\geqslant K$．从而对前 4 种情况均有 $d(A;G')\geqslant K$．对情况(5)若 $\lambda(a,b;G')\geqslant K$，则也有 $d(A;G')\geqslant K$．故假设的割集 $E(A;G')$ 不存在，即 G' 是 K 边连通的．　　证毕

对于任意的两条扩充边 $[a,b]$ 和 $[x,y]$，如果 $a\neq b\neq x\neq y$ 且 $f(a,x)+f(b,y)<f(a,b)+f(x,y)$，则称边 $[a,x]$ 和 $[b,y]$ 是可能的边交换．根据引理 5，对于无向 K 边连通扩充图，只需求一次边连通度就可以判断一个可能的边交换是否是可行的．

在边交换过程中，首先列举出所有可能的边交换，然后逐一检查它们是否是可行的．如果一个可能的边交换是可行的，则接受这个边交换．那么其它可能的边交换中有一部分随着这个边交换的被接受而变成不可能的边交换．再重新列举所有可能的边交换，逐一检查其是否可行．直到最终所有可能的边交换均是不可行的为止．

五、边替代

一般说，对图 G_0 的最优扩充(权值最小)，其扩充边数并不一定最少．尤其当权值函数不满足三角不等式 $[f(a,c)>f(a,b)+f(b,c)]$ 时更是如此，故对于 G_0 的一个初始连通图 G，若只进行边交换，则扩充边数始终保持为最少，而达不到最优．因此，对于边交换后的图 G 来说，还可能存在这样的扩充边，若用另外一条或两条边取代它后，能使得图 G 的权值下降并保持图 G 的边连通度不变．由此，我们提出一个新过程——边替代，即用一条或两条权值较小的边取代一条权值较大的扩充边，使得图 G 的权值下降并保持边连通度不变．

在边替代过程中，对 G_0 的 K 边连通扩充图 G，首先判断它的一条扩充边 $[x_1, x_2]$ 是否可能被替代，若可能被替代，则将它去掉，然后检查各点之间的边连通度并将点集 $V(G)$ 划分成这样的集合：$V(G)=A_1\cup A_2\cup\cdots A_n$，每个点集 A_i (除点 x_1 和 x_2 外) 是 K 边连通的，点集之间是 $K-1$ 边连通的．再检查是否有一条或两条边能替代边 $[x_1, x_2]$，直至所有的扩充边检查完毕为止．其过程如下：

过程　边替代

(1) 若所有的扩充边均已着色，则停止．否则取一条权值最大的未着色的扩充边 $[x_1,x_2]$．

(2) 令 $w_1 = \min_{y \in V(G)} f(x_1, y)$, $w_2 = \min_{y \in V(G)} f(x_2, y)$. 若 $d(x_1;G) > K$，则使 $w_1 = 0$；若 $d(x_2;G) > K$，则使 $w_2 = 0$. 如果 $f(x_1, x_2) < w_2 + w_2$，则将边 $[x_1, x_2]$ 着色，转(1). 否则去掉边 $[x_1, x_2]$，转(3).

(3) 将点集 $V(G)$ 划分成 $V(G) = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$，除点 x_1 和 x_2 外，每个子集 A_i 是K边连通的，两个子集间是$K-1$边连通的.

(4) 若 $n=1$，即图G除了 x_1 和 x_2 外是K边连通的. 此时，若 $d(x_1;G) < K$，则选择一点 a 使得 $f(x_1, a) = \min_{y \in V(G)} f(x_1, y)$，增加边 $[x_1, a]$ 至G中并将其着色；若 $d(x_2;G) < K$，则选择一点 b 使得 $f(x_2, b) = \min_{y \in V(G)} f(x_2, y)$，增加边 $[x_2, b]$ 并将其着色，转(1).

(5) 若 $n \geqslant 2$，设 $x_1 \in A_1, x_2 \in A_n$，不妨将点集 A_i 按这样的顺序标号：A_2 和 A_1 邻接，A_3 和 A_2 邻接，$\cdots$，A_n 和 A_{n-1} 邻接. 令

$$u_i = \min_{y \in A_1, y_1 \in A_i} f(y, y_1) + \min_{y_2 \in A_i, y_3 \in A_n} f(y_2, y_3)$$

其中 $A_i' = A_1 + A_2 + \cdots + A_i, i = 1, 2, \cdots, n$.

现根据点 x_1 和 x_2 的度作如下修改：

若 $d(x_1;G) < K$，则使 $y = x_1$；若 $d(x_2;G) < K$，则使 $y_3 = x_2$；若 $d(x_1;G) \geqslant K$，则使 $u_1 = \min_{y_2 \in A_1, y_3 \in A_n} f(y_2, y_3)$；若 $d(x_2;G) \geqslant K$，则使 $u_n = \min_{y \in A_1, y_1 \in A_n} f(y, y_1)$.

设 $u_0 = \min_{i=1}^{n} u_i$. 如果 $u_0 < f(x_1, x_2)$，则增加按 u_0 所对应的一条或两条扩充边并将其着色，转(1)；否则转(6).

(6) 将边 $[x_1, x_2]$ 再加至G中，将其着色，转(1).

对边替代过程的两点说明：

(1) 如果 $f(x_1, x_2) < w_1 + w_2$，则没有边能替代边 $[x_1, x_2]$ 使得总权值下降.

(2) 在步骤(3)中，如果点集的个数大于2，则点集之间一定是链状邻接的，并且点 x_1 和 x_2 分别在两个悬点集（悬点集为只和一个点集相邻接的点集）之内. 如果不是这样，则由于在去掉边 $[x_1, x_2]$ 后，点集之间的边连通度是 $K-1$，当恢复边 $[x_1, x_2]$ 后，该图不是K边连通的. 这与它是K边连通图相矛盾.

在边替代过程中，若有新的扩充边产生，则图G的边连通度保持不变且总权值下降.

证明　设在步骤(4)有新边产生. 由于图G除 x_1 和 x_2 外是K边连通的，当去掉边 $[x_1, x_2]$ 后，若 $d(x_1;G) < K$，则 $\lambda(x_1, y; G) = K-1$, $y \in V(G) - \{x_1, x_2\}$. 当增加边 $[x_1, a]$ 后，$\lambda(x_1, a; G) = K$. 根据引理2，应有 $\lambda(x_1, y; G) = K$. 若此时 $d(x_2;G) \geqslant K$，根据引理3，应有 $\lambda(G) = K$. 若 $d(x_2;G) < K$，当增加边 $[x_2, b]$ 后，$\lambda(x_2, b; G) = K$. 故图G是K边连通的. 又因为 $w_1 = f(x_1, a), w_2 = f(x_2, b), w_1 + w_2 < f(x_1, x_2)$，所以在步骤(4)中若有新边产生，必然在保持边连通度不变下使总权值减少.

若在步骤(5)有新边产生，假设边 $[a, c]$ 和边 $[b, d]$ 替代了边 $[x_1, x_2]$，$a \in A_1$，$b \in A_i, c \in A_j, d \in A_n, i \leqslant j$，如图2所示. 由于在增加这两条边前，每个点集（除点 x_1 和 x_2 外）是K边连通的，两个点集之间是$K-1$边连通的，在增加这两条边后，G中每一点

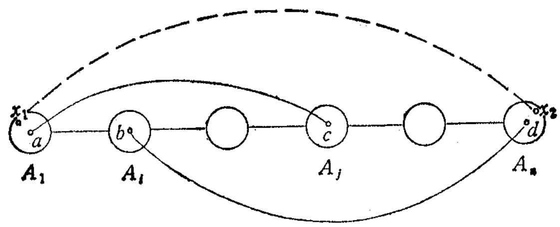

图 2 边替代

的度均大于或等于 K，并且 $\lambda(a,c;G)=K$，$\lambda(b,d;G)=K$. 根据引理2和3,点集 A_1 和 A_j,A_i 和 A_n 是K边连通的. 对于点集 $A_m(m\leqslant j)$，显然 A_1 和 A_m 间有$K-1$条边不相重路径,此外还有一条边不相重路径: $A_m\to A_{m+1}\to\cdots\to A_j\to A_1$. 因此 A_1 和 A_m 也是K边连通的. 因为 $m\leqslant j$，故点集 $A'=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_j$ 是K边连通的. 同样,点集 $A''=A_i\cup A_{i+1}\cup\cdots\cup A_n$ 也是K边连通的,又因 $i\leqslant j$，所以图G是K边连通的. 此外,由于 $f(a,c)+f(b,d)=u_0<f(x_1,x_2)$，故用两条边替代边 $[x_1,x_2]$ 能使图G的权值下降并可保持 $\lambda(G)$ 不变. 类似地,用一条边替代边 $[x_1,x_2]$ 结果也是这样. 证毕

六、算法的实现和计算结果

由于边交换和边替代是互相独立的，故在形成初始K边连通图后，即可先执行边交换,再执行边替代，也可以先执行边替代后执行边交换. 对于一个图 G，可以按这两种方式分别求出各自的扩充图，从中选择总权值小的一个作为结果. 两种方式哪一个结果更好是由 G_0 的拓扑结构,权值函数和初始连通图所决定的.

无向连通加权图的K边连通扩充算法（WKA):

(1) 形成初始K边连通图.

(2) 执行边交换(或边替代).

(3) 执行边替代(或边交换).

(4) 若在(2)和(3)中无新的扩充边产生,则停止;否则转(2).

算法 WKA 已在 IBM-PC 机上实现并计算了一些典型例题. 大量的计算表明，对于一般规模的图,算法 WKA 只需迭代2次即可停止.

以上只讨论了 G_0 是连通图的情况. 对于非连通图，仅需在形成初始K边连通图时对算法 WKA 稍作修改(略),仍可应用.

在构造可靠网络以及用增新线路来提高已有网络的可靠性时，必然会遇到要寻找费用最少的联线方案. 而边连通度是衡量网络抗线路故障的非常重要的可靠性指标，故本文的研究除具有理论意义外,对用计算机辅助自动设计或改建网络也有实用价值.

参考文献

[1] K. P. Eswaran, R. E. Tarjan, *SIAM J. Comput.*, 5(1976)4, 653—665.

[2] S. Ueno, Y. Kujitani, H. Wada, The Minimum Augmentation of a Tree to a K-Edge-Connected Graph, Technical Research Reports, (1983-05), pp. 1—6, I. E. C. E., Japan.

[3] Cai Guorui, Sun Yugeng, The Minimum Augmentation of any Connected Graph to a K-Edge-Connected Graph, Proc. Int. Symp. on Circuit and Systems. pp. 984—987 (1986).

[4] 孙立山，孙雨耕，杨山，电子科学学刊，12(1990)6,593—599.

[5] G. N. Frederickson, Joseph Jája, *SIAM J. Comput.*, 10(1981)2, 270—283.

[6] B. Bollobas, Extremal Graph Theory, Academic Press, London (1978).

[7] W. Mader, A Reduction Method for Edge-Connectivity in Graphs. in: B. Bolloás ed., Advances in Graph Theory, Ann. Siscrete Math. 3(North-Holland, Amsterdam, 1978) pp. 145—164.

THE AUGMENTATION OF ANY UNDIRECTED WEIGHTED GRAPH TO A K-EDGE-CONNECTED GRAPH

Sun Lishan

(*Harbin Institute of Technology, Harbin*)

Sun Yugeng Yang Shan

(*Tianjin University, Tianjin*)

Abstract An approximation algorithm is presented for augmenting an undirected weighted graph to a K-edge-connected graph. The algorithm is useful for designing a realizable network.

Key words K-edge-connected augmentation; Edge-exchange; Edge-replacement