

# 任意横截面形状同轴线的 高次有限元分析

徐善驾 盛新庆

(中国科学技术大学,合肥 230027)

**摘要** 本文用高次有限元分析了任意横截面形状同轴线特性阻抗;给出了一个用二次元求解同轴线特性阻抗的通用程序。由于提出了一种便于编制通用程序的计算机自动区域剖分方法,使整个分析过程十分简便有效,大大提高了解题效率。文中对十余种不同横截面形状同轴线特性阻抗的计算,有力地证实了该程序的可靠性、通用性和准确性。同时,在数值分析的基础上,对高次元的解题效能进行了讨论。

**关键词** 同轴线;特性阻抗;高次有限元分析

## 一、引言

近年来,随着各种非圆同轴线在微波工程中应用的不断扩大,人们对任意横截面形状同轴线的分析产生了浓厚的兴趣<sup>[1-5]</sup>。例如矩形同轴线定向耦合器在通信卫星赋形波束天线的馈线系统中有着重要的作用<sup>[6]</sup>。各种由矩形同轴线构成的元件也逐步研制出来,并得到了很好的应用。由于矩形同轴线的加工可以利用线切割工艺,因此它所需要的接头与圆形同轴线相比大为减少,由此种同轴线所构成的部件和电路不仅更加牢固可靠,提高了系统的稳定性,而且也减少了损耗,改善了整机性能。又如在各种同轴线与其它传输线的过渡器中,渐变非圆同轴线起着关键作用。由此可见任意横截面形状同轴线特性阻抗的分析在微波工程中具有明显的实际意义。

求解同轴线特性阻抗的方法有多种,其中用得较多的是保角变换法。这种方法的优点是可以得到特性阻抗的解析表达式,但由于保角变换的需要,对一些复杂形状的同轴线在求解时,不得不作某些近似,这就影响了精度。此外,这种方法的通用性较差。本文用以变分原理为基础的高次有限元方法求解任意横截面形状同轴线的特性阻抗并编制了一个通用程序。由于这种方法在处理各种复杂边界形状时所固有的灵活性和适用性,再加上我们提出了一种便于编制通用程序的区域剖分方法,使整个分析过程十分简便和有效,大大提高了解题效率。文中,通过对线性元和二次元计算结果的比较和收敛性的讨论,充分显示了高次元的解题效能。

## 二、同轴线特性阻抗的高次有限元分析

图 1 给出了任意横截面形状同轴线的结构示意图。众所周知,同轴线中的 TEM 模的位函数是下列边值问题的解:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= 0 \\ \varphi|_o &= V(x, y) \\ \Omega &= \Omega_1 + \Omega_2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

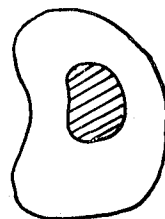


图 1 任意横截面形状同轴线的结构

式中  $\Omega_1, \Omega_2$  是  $S$  域的边界。该边值问题等价于下列二次泛函的变分问题:

$$J(\varphi) = \iint_S \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (2)$$

若采用三角形上的二次插值,则  $\varphi$  在整个求解域内任一点的值可表示为

$$\varphi(x, y) = \sum_{e=1}^{KM} \sum_{i=1}^6 N_i^e(x, y) \varphi_i^e \quad (3)$$

其中,  $KM$  为求解域  $S$  内的总单元数,  $\varphi_i^e$  是  $\varphi$  在第  $e$  个单元,第  $i$  个节点上的值;  $N_i^e$  是定义在单元  $e$  内二次插值的基函数,它们的具体表达式可参见文献[7,8],这里不重复。若共有  $KP$  个节点,则根据极值存在的必要条件有

$$\frac{\partial J(\varphi)}{\partial \varphi_j} = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, KP) \quad (4)$$

将(3)式代入(4)式,对于第  $e$  个单元来说有

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial J^e}{\partial \varphi_1} \\ \frac{\partial J^e}{\partial \varphi_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial J^e}{\partial \varphi_6} \end{pmatrix} = ([A_1] \text{ctg} \theta_1 + [A_2] \text{ctg} \theta_2 + [A_3] \text{ctg} \theta_3) (\varphi^e)$$

其中

$$[A_1] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 3 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ \text{对} & & 3 & 0 & -4 & 0 \\ & & & 8 & 0 & -8 \\ \text{称} & & & & 8 & 0 \\ & & & & & 8 \end{bmatrix} \quad [A_2] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{对} & & 3 & 0 & 0 & -4 \\ & & & 8 & -8 & 0 \\ \text{称} & & & & 8 & 0 \\ & & & & & 8 \end{bmatrix}$$

$$[A_3] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ & 3 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ & & \text{对} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 8 & 0 & 0 \\ & & & & & 8 & -8 \\ & & & & & & 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{ctg}\theta_1 = (b_2b_3 + c_2c_3)/(2\Delta_e), \quad \text{ctg}\theta_2 = (b_1b_3 + c_1c_3)/(2\Delta_e)$$

$$\text{ctg}\theta_3 = (b_1b_2 + c_1c_2)/(2\Delta_e)$$

对所有单元累加后得总的矩阵方程

$$[A][\varphi] = 0$$

需要说明的是,这时的矩阵  $[A]$  尚不能作最后定解的代数方程的系数阵,因为(1)式的边界条件是强加边界条件,因此还必须对上面得到的矩阵  $[A]$  的元素作如下处理:

$$A_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n, \text{ 但 } m \text{ 或 } n = h_l, l = 1, 2, \dots, M \\ 1, & m = n, n = h_l, l = 1, 2, \dots, M \end{cases}$$

同时(5)式中为零的自由项也应作如下的修改:

$$B_{mn} = \begin{cases} V_{hl}, & m = h_l, l = 1, 2, \dots, M \\ -\sum_{l=1}^M A_{mh_l} V_{h_l}, & m \neq h_l, l = 1, 2, \dots, M \end{cases}$$

上式中  $M$  表示落在内外导体金属边界  $\Omega$  上的节点数,这些点的编号为  $h_1, h_2, \dots, h_M$ .

假定  $\varphi|_{\Omega_1} = 0, \varphi|_{\Omega_2} = 1$ ; 那么在求得了同轴线的电位函数以后,可以证明该同轴线的特性阻抗  $Z_0$  可由下式确定:

$$\frac{1}{Z_0} = \mathcal{E} \cdot \sum_{s=1}^{KM} \left( \frac{1}{4} W_1^s + \frac{2}{3} W_2^s - \frac{1}{6} W_3^s + \frac{2}{3} W_4^s + \frac{2}{3} W_5^s \right) / \Delta_e$$

式中

$$W_1^s = (b_1^2 + c_1^2)\varphi_1^2 + (b_2^2 + c_2^2)\varphi_2^2 + (b_3^2 + c_3^2)\varphi_3^2$$

$$W_2^s = (b_1^2 + b_1b_2 + b_2^2 + c_1^2 + c_1c_2 + c_2^2)\varphi_4^2 + (b_2^2 + b_2b_3 + b_3^2 + c_2^2 + c_2c_3 + c_3^2)\varphi_5^2 + (b_3^2 + b_3b_1 + b_1^2 + c_3^2 + c_3c_1 + c_1^2)\varphi_6^2$$

$$W_3^s = (b_1b_2 + c_1c_2)\varphi_1\varphi_2 + (b_2b_3 + c_2c_3)\varphi_2\varphi_3 + (b_3b_1 + c_3c_1)\varphi_3\varphi_1$$

$$W_4^s = (b_1b_2 + c_1c_2)(\varphi_1 + \varphi_2)\varphi_4 + (b_2b_3 + c_2c_3)(\varphi_2 + \varphi_3)\varphi_5 + (b_3b_1 + c_3c_1)(\varphi_3 + \varphi_1)\varphi_6$$

$$W_5^s = (b_2^2 + b_1b_3 + B + c_2^2 + c_1c_3 + C)\varphi_4\varphi_5 + (b_3^2 + b_1b_2 + B + c_3^2 + c_1c_2 + C)\varphi_5\varphi_6 + (b_1^2 + b_2b_3 + B + c_1^2 + c_2c_3 + C)\varphi_6\varphi_4$$

其中

$$B = b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_1, \quad C = c_1c_2 + c_2c_3 + c_3c_1$$

### 三、计算举例

几何剖分是有限元法中关键的一步,让计算机自动产生网格是编制通用程序的基础。

所谓自动产生网格就是由计算机自动分割求解域,给节点和单元编号,并确定诸节点的坐标。编制具有这种能力计算程序的实际意义,不仅在于使它具有通用性的特点,而且可以大大简化解题过程,缩短解题周期。下面仅举几例说明本文提出的计算机自动剖分的方法。

对于内、外导体都是直线边界的同轴线,以图 2(a) 为例,本文采用如图 2(b) 所示的剖分方法。根据对称性,可以只取八分之一区域进行分析。将该区域分成两部分,每部分纵向分别分成  $M, N$  等分。设  $KM$  为总面元数,  $KP$  为总节点数,则有

$$KM = 2M^2 + (4M + N)N$$

$$KP = (2M + 1)^2$$

$$+ (8M + 2N + 3)N$$

这种剖分,如图 2(b) 所示,共有 7 类三角形面元,我们任取一类面元,例如类型  $K3$  的面元,其面元编号与点元编号和面元 6 节点编号之间有下列关系:

$$K3 = 2I^2 + J$$

$$L(1, K3) = (2I)^2 + 2(J - 1) + 1$$

$$L(2, K3) = L(1, K3) + 2$$

$$L(3, K3) = L(1, K3) + 8I + 6$$

$$L(4, K3) = L(1, K3) + 1$$

$$L(5, K3) = L(1, K3) + 4I + 4$$

$$L(6, K3) = L(5, K3) - 1$$

其余类型的三角形面元可得到类似的关系,这里不赘述。

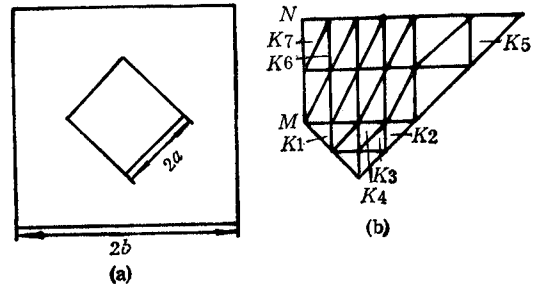


图 2

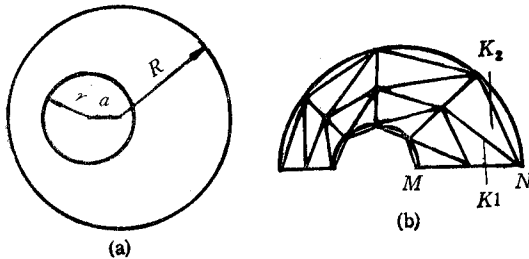


图 3

对于内、外导体都是曲线边界的同轴线,以图 3(a) 为例,采用如图 3(b) 的剖分方法。这时三角形类型只有两类,并可得到下列各式:

$$KM = 2MN$$

$$KP = (2M + 1)(2N + 1)$$

其中  $M, N$  分别是将半圆弧径向等分数。对于  $K1$  类的面元,有

$$K1 = 2(I - 1)N + J$$

$$L(1, K1) = 2(2N + 1)I + 2(J - 1) + 1$$

$$L(2, K1) = L(1, K1) - 2(2N + 1)$$

$$L(3, K1) = L(2, K1) + 2$$

$$L(4, K1) = L(2, K1) + 2N + 1$$

$$L(5, K1) = L(2, K1) + 1$$

$$L(6, K1) = L(5, K1) + 1$$

对于内导体为直线边界,外导体为曲线边界的同轴线,以图 4(a) 为例,采用如图

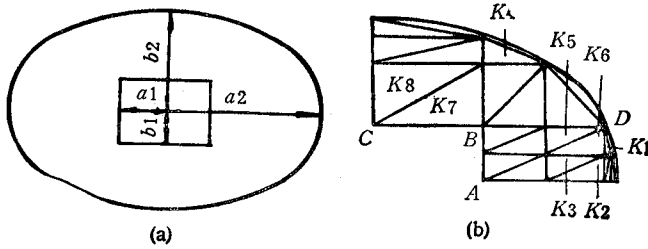


图 4

4(b) 所示的剖分方法。此时三角形面元共有 8 类,并有下列关系式:

$$KM = (N + LM)^2 + M(2LM + N)$$

$$KP = (4LM + 2N + 3)N + (M + LM + 1)(2LM + 2M + 1)$$

其中  $M, N, LM$  分别是将  $AB, BC, BD$  的等分数。对于  $K4$  类面元,有

$$K4 = (2N + 2LM - I + 1)I - (N + LM) + M(2LM + M)$$

$$L(1, K4) = M(4LM + 2M + 3) + (2I + 1)(2(N + LM) - I + 1)$$

$$L(2, K4) = L(1, K4) - 4(N + LM - I + 1) - 1$$

$$L(3, K4) = L(2, K4) + 2$$

$$L(4, K4) = L(2, K4) + 2(N + LM - I + 1) + 1$$

$$L(5, K4) = L(2, K4) + 1$$

$$L(6, K4) = L(4, K4) + 1$$

这里给出的由计算机自动剖分求解域的方法虽然只是对几种特殊形状来讨论的,但它的基本思想和处理技巧也适用于任何几何形状的自动剖分。

表 1 是用线性元和二次元计算具有精确值的圆形同轴线特性阻抗数值的结果比较。由表 1 可见,当  $KP$  为 100 多个节点时,二次元的精度已比一次元好了不少,到了  $KP$  为 200 多个节点时,精度要提高 2 个量级,而且二次元比线性元的收敛速度要快得多。由表 2 可见,对于具有精确解的偏心圆形同轴线也有同样的结论,充分说明二次元优越的解题效能。需要说明的是,由于偏心圆形同轴线只是上下对称,不具有左右对称性,所以只能

表 1 圆同轴线特性阻抗线性元与二次元计算值之比较  
 $r = 2 \quad R = 4 \quad Z = 41.5556$  (精确值)

MN	线性元	误差	MN	二次元	误差
49	41.27219	0.7%	45	41.35690	0.5%
121	41.45712	0.2%	105	41.53278	0.05%
225	41.50814	0.1%	217	41.55297	0.006%
336	41.53159	0.06%	287	41.55593	0.0008%

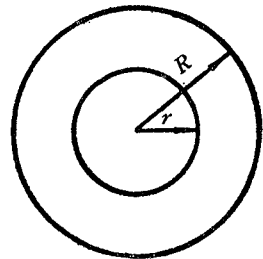


表 2 图 3(a) 所示偏心圆同轴线特性阻抗线性元与二次元计算值之比较  
 $r = 1 \quad R = 2 \quad a = 0.2 \quad Z = 40.74716$  (精确值)

MN	线性元	误差	MN	二次元	误差
64	40.02921	1.8%	65	40.34252	1%
121	40.39870	0.9%	119	40.59077	0.4%
225	40.57217	0.4%	217	40.71994	0.07%
324	40.63033	0.3%	315	40.73885	0.02%

取二分之一计算,而圆形同轴线能取四分之一计算,因此,在节点数相同时,前者的精度要低于后者。

为了进一步检验本程序的可靠性,我们挑选了 12 种同轴线进行了计算,限于篇幅,这里只列出几种同轴线在不同尺寸下特性阻抗的计算值,以及与其它文献数据的比较(表 3—表 6)。由表可见,所得数据与用其它方法得到的结果都吻合得很好,充分证实了本程序的可靠性和精确性。表 7 给出了节点数与计算时间的关系。由表 7 可见,当节点数为 200 多时,其计算时间仅需 2s 多。根据我们的经验,在一般情况下,用 200 多个节点计算特性阻抗,就可以获得足够高的精度。由此可见,本文给出的通用程序不仅精确、可靠,而且具有很好的实用性。

表 3 矩形同轴线特性阻抗不同方法计算值之比较  
 $a_1 = b_1 \quad a_2 = b_2 \quad s = (a_1 + a_2)/a_1 \quad MN = 253$

$s$	文献 [4]	本文	偏差
5:4	10.933	10.97419	0.4%
2:1	36.771	36.69880	0.2%
5:2	49.754	49.63827	0.2%
4:1	77.630	77.32203	0.4%

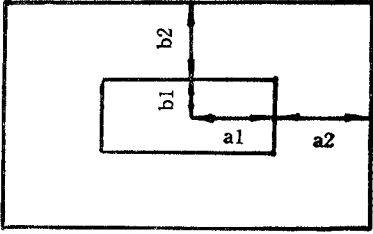


表 4 图 2(a) 所示同轴线特性阻抗不同方法计算值之比较  
 $KP = 204$

$a/b$	文献 [1]	本文	偏差
0.547498	30	29.37900	2.0%
0.464000	40	39.92503	0.2%
0.232320	80	81.51629	1.9%
0.168230	100	100.4441	0.4%
0.121257	120	119.2683	0.6%

表5 图4(a)所示同轴线特性阻抗不同方法计算值之比较

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, KP = 261$$

$a_1/a_2$	文献 [3]	本文	偏差
0.2813	65.65	65.04059	0.9%
0.4183	41.89	41.90960	0.05%
0.4619	35.92	36.05086	0.4%
0.5145	29.45	29.55990	0.4%
0.5772	22.56	22.48443	0.3%

表6 椭圆同轴线特性阻抗不同方法计算值之比较

$$a_1 = b_1, a_2 = 1.5 \times b_2, KP = 289$$

$a_1/b_2$	文献 [2]	本文	偏差
0.1	146.71	146.526	0.13%
0.3	80.83	80.85266	0.03%
0.5	50.10	50.11412	0.03%
0.7	29.53	29.49519	0.03%
0.9	12.75	12.75059	0.005%

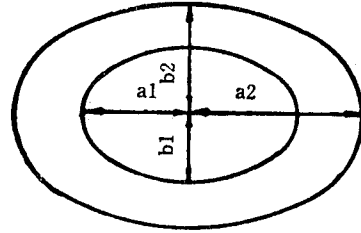


表7 节点数与 CPU 计算时间的关系(计算机 VAX8700)

MN	55	147	287	357	459	525	626	1025
CPU 时间 (s)	0.5	0.78	2.70	4.36	8.47	8.61	12.80	121.32

## 参 考 文 献

- [1] Lin Weigan, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-30** (1982) 11, 1981—1988.
- [2] Pan Shenggen, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-36** (1988) 5, 917—921.
- [3] 林为干, 物理学报, **30**(1981)1, 12—21.
- [4] 林为干, 微波理论与技术, 科学出版社, 北京, 1979年.
- [5] H. J. Riblet, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-23** (1975) 8, 714—715.
- [6] Wulu Chang, *Frequenz*, **43** (1989) 10, 271—276.
- [7] 徐善驾, 电子学通讯, **4**(1982)4, 222—234.
- [8] 徐善驾, 彭松村, 通信学报, **6**(1985)4, 62—69.

## HIGH-ORDER FINITE-ELEMENT ANALYSIS OF VARIOUS COAXIAL LINES WITH ARBITRARY CROSS-SECTIONS

Xu Shanjia Sheng Xinqing

*(University of Science and Technology of China, Hefei 230027)*

**Abstract** The high-order finite-element method is used for analyzing the characteristic impedances of the coaxial lines with arbitrary cross-sections. A standard program with second order element analysis for calculating the characteristic impedances of various coaxial lines is developed. A computer automatic division technique is proposed to facilitate the development of the general program. As a result, the whole analysis procedure becomes simple and the solution efficiency raises tremendously. The calculations of the characteristic impedances for more than ten different coaxial lines verify the reliability, generality and accuracy of the present program. The validity of the high-order element is also discussed on the basis of the numerical analysis.

**Key words** Coaxial line; Characteristic impedance; High-order finite-element analysis