

基于模拟退火的二相码选码方法

李 炳 成

(东南大学生物医学系,南京)

摘要 二相码信号由于实现简单,已经广泛地应用于各种脉冲压缩雷达,然而到目前,高压缩比、低旁瓣二相码信号的优选由于数学处理的困难和计算代价的昂贵一直没有很好解决。本文引入神经元计算的思想,提出了基于模拟退火的二相码选码方法。实验结果表明,这种方法不仅能搜索到最优码,搜索次数大大减少,而且易于做到优选二相码的优化程度与计算代价之间的折衷。

关键词 二相码;选码;旁瓣;模拟退火

一、引言

二相码信号由于仅有 1 和 -1 两相,产生和处理都十分简单,因此被广泛应用于脉冲压缩雷达。然而,作为二相码信号的最基本问题,即二相码的优选问题却一直没有得到解决。A. M. Boehmer^[1] 在 1967 年提出了基于数论的选码方法,可以优选出旁瓣较低的二相码,但其码长必须为素数。码长的这一约束限制了 Boehmer 方法的应用。P. V. Indiresan 等人^[2] 和 U. Samaini^[3] 提出了二相码选码的计算机搜索方法。此方法不受 Boehmer 方法的约束条件的限制,可以优选任意长度的二相码。但这种方法一般搜索不到最优码,而且优选的二相码的质量(即旁瓣峰值的大小)强烈依赖于初始码的选取。J. Lindner^[4] 提出搜索最优码的穷举方法,这种方法计算量太大,当 N 稍大时 ($N > 40$),该方法就完全失效。针对上述问题,本文引入神经元计算的思想,以旁瓣峰值为代价函数,提出了二相码选码的模拟退火 (Simulated Annealing 缩写为 SA) 方法。本方法克服了 Boehmer 方法对码长限制,解决了 Indiresan 等人方法只能搜索到局部最优码的缺点。此外,不管选取何种初始二相码,本方法均能搜索到最优二相码。在实现速度上,本方法远远优于 Lindner 方法,计算机模拟结果表明,本方法的搜索次数要比 Lindner 方法低几个数量级。

二、二相码信号的优选问题

二相码信号是其元素取 1 和 -1 的编码信号。设码长为 N 的二相码信号为

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_N), a_i = \{1, -1\} \quad (1)$$

该二相码的旁瓣共有 $N - 1$ 个,定义为

$$s(m) = \left| \sum_{i=1}^{N-m} a_i a_{i+m} \right| \quad (2)$$

二相码 A 的旁瓣峰值定义为

$$s_m = \max_{m=1-(N-1)} s(m) \quad (3)$$

我们知道, 码长为 N 的二相码共有 $P = 2^N$ 个, 记为 A_1, A_2, \dots, A_p . 最优二相码就是 s_m 为最小的那些二相码。下面, 看一下最优二相码的存在性和唯一性问题。这里谈最优, 都是对一定码长而言的。

定理 1 (存在性定理) 给定码长 N , 总存在一个二相码 A_m , 使得 A_m 的旁瓣峰值 s_{Am} 不大于其余的 $2^N - 1$ 个二相码信号的旁瓣峰值。

证明 $s_m = \max_{m=1-(N-1)} \left| \sum_{i=1}^{N-m} a_i a_{i+m} \right| \geq |a_i a_N| = 1$, 即 $s_m \geq 1$.

由(2)式和(3)式知, s_m 为正整数, 因此, 总存在二相码 A_m , 使得其旁瓣峰值最小。

定理 1 表明, 最优二相码是存在的。最优二相码存在但不唯一。这是由于二相码信号与其旁瓣不一一对应所致。

定理 2 (非唯一性定理) 至少有两个二相码(对于长度 N), 其旁瓣峰值相等, 也就是说, 最优二相码不是唯一的。

证明 设 $A = (a_0, a_1, \dots, a_{N-1})$ 的旁瓣峰值为 s_m , 则有

$$s_m = \max_{m=1-(N-1)} \left| \sum_{i=0}^{N-m-1} a_i a_{i+m} \right|$$

由于 $a_i = \{1, -1\}$, 显然 $A' = (-a_0, -a_1, \dots, -a_{N-1})$ 也为码长为 N 的二相码, 设其旁瓣峰值为 s'_m , 则有

$$s'_m = \max_{m=1-(N-1)} \left| \sum_{i=0}^{N-m-1} a'_i a'_{i+m} \right| = \max_{m=1-(N-1)} \left| \sum_{i=0}^{N-m-1} a_i a_{i+m} \right| = s_m$$

即 $s_m = s'_m$, 因此定理 2 成立。

最优二相码的非唯一性并不影响我们的选码工作, 因为, 二相码的好坏只与旁瓣峰值有关。因此, 只要找到旁瓣峰值最低的任何一个二相码, 就算找到了最优二相码。

为了阐述本工作的意义, 先讨论一下二相码选码算法好坏的标准。

首先, 选码的计算代价要低。这一点十分重要, 因为计算代价过高, 将使算法不可能实用。很显然, Lindner^[4] 的穷举法满足不了这一要求。然后是最优码的可寻性要高。这一点的理论价值较高。一个选码算法只有当它搜索到的最优二相码是总体优化码才可以被认为是一个完善的算法。最后一个标准是优化程度和计算代价之间可以折衷。我们知道, 现代电子战要求雷达信号具有很高的压缩率, 也就是说要求码长很长。因此, 一般情况下, 找到的最优二相码都是准最优二相码。这就要求选码算法能够对计算代价与优化程度取折衷, 以便能够在计算代价许可的情况下, 选出较好的二相码。从以下的讨论将看到, 传统的方法均存在这样或那样的问题, 而本文的方法基本上能满足上述要求。

三、模拟退火的选码方法

早在 1953 年, N. Metropolis 等人^[5]就提出了模拟退火方法, 并将其应用在分子过

程的模拟上。1983年，S. Kirkpatrick 等人^[4]将该方法用在优化问题上，比较成功地解决了组合优化问题。之后，模拟退火方法作为神经网计算的基本方法，被广泛应用于优化各个领域^[7-9]。模拟退火的基本思想是：给定一个初始温度和初始状态组成，选取代价函数 c_i ，然后，随机扰动目前的状态组成，要是代价函数降低，接受这种扰动；反之，则以一定的概率接受，这种过程一直进行到准平衡，然后降低退火温度再重复上述过程。

模拟退火方法可以应用于二相码的选码。我们认为，每一个二相码对应一个状态，共有 2^N 个状态。取一初始二相码：

$$A = (a_0, a_1, \dots, a_{N-1}) \quad (4)$$

其旁瓣峰值为

$$s_m = \max_{k=1-(N-1)} \left| \sum_{i=0}^{N-1-k} a_i a_{i+k} \right| \quad (5)$$

取 s_m 作为代价函数，然后，随机扰动一码元，即取均匀随机数 x ，作

$$k = \text{int}(N \cdot x) \quad (6)$$

这里 $\text{int}(\cdot)$ 表示取整。令 $a'_k = -a_k$ ，从而得到新的二相码为

$$\begin{aligned} A' &= (a'_0, a'_1, \dots, a'_{k-1}, a'_k, a'_{k+1}, \dots, a'_{N-1}) \\ &= (a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, -a_k, a_{k+1}, \dots, a_{N-1}) \end{aligned}$$

计算 A' 的旁瓣峰值 s'_m ，若 $s'_m < s_m$ ，则接受这次扰动；若 $s'_m \geq s_m$ ，则设退火温度为 c_k ，代价函数的增加量为 $\Delta s = s'_m - s_m$ ，并以概率 $p(c_k, \Delta s)$ 接受这次扰动。接着在温度 c_k 下重复上述过程直达到局部最优。然后改变温度，即逐渐降温直达到总体最优。

上述方法实现步骤如下：

- (1) 置初值。选取初始温度 c_0 ，任意的初始二相码 A_0 ，计算初始二相码的旁瓣峰值 $s_m(0)$ ，并将 c_0 、 A_0 和 $s_m(0)$ 分别看成当前的退火温度、二相码和旁瓣峰值。
- (2) 对当前二相码 A_i （初始为 A_0 ）进行随机扰动，得到新的二相码 A_i ，相应的旁瓣值由 $s_m(i)$ 变到 $s_m(j)$ 。
- (3) 若 $s_m(j) < s_m(i)$ ，即代价函数（旁瓣峰值）减小，则接受这次扰动，并用 A_i 和 $s_m(j)$ 代替 A_i 和 $s_m(i)$ 作为当前的二相码和旁瓣峰值。
- (4) 若 $s_m(j) \geq s_m(i)$ ，则作 $\Delta_{ij} = s_m(j) - s_m(i)$ ，并以概率 $p(c_k, \Delta_{ij})$ 接受这次扰动；否则，抛弃这次扰动。这里 c_k 为退火温度。
- (5) 重复步骤(2)–(4)，直至达到准平衡。
- (6) 改变退火温度，使温度按 $c_{k+1} = f(c_k)$ 方式下降，然后重复步骤(2)–(6)，直到退火温度 $c_i \leq c_f$ ，系统达到最优为止。
- (7) 结束。

这里，初始温度 c_0 ， $p(\Delta_{ij})$ 和 $c_{k+1} = f(c_k)$ 的选取目前还没有较好的办法。我们通过计算机实验发现，对于二相码的优选，接受概率函数以具有韦伯尔函数的形式较为合适，即

$$p(c_k, \Delta_{ij}) = \exp(-(\Delta_{ij}/c_k)^\alpha), \quad \alpha = 1-2 \quad (7)$$

初始温度选为 $N-5N$ 较合适，这里 N 为码长，而降温具有下述形式较好：

$$c_k = c_0/k^\beta, \quad \beta = 1-2 \quad (8)$$

四、本方法的优越性和实验结果。

模拟退火方法用来优选二相码，使得许多在数学上难以处理的问题得到较好的处理。与前人方法比较，本方法具有如下优点：

(1) 本方法克服了 P. V. Indiresan 等人方法的缺点，搜索到总体最优码。搜索最优码好比爬坡一样，最优点为最高峰，局部最优点为一些小的山峰(如图 1)。P. V. Indiresan 等人的方法一般只能爬到一些小山峰。而且初始条件不同，爬到不同的小山峰，作为自己的最优点。在初始条件 1 情况下，爬到局部最优点 A_1 点；而在初始条件 2 情况下，爬到最优点 A_2 点。因此，P. V. Indiresan 等人的方法仅仅能搜索到局部最优，而且搜索的结果与初始条件有关。本方法采用了以一定概率接受高代价的扰动，使得爬坡能够离开局部最优点到达总体最优点。这一过程如图 2 所示。在初始条件 1 的情况下，先在 A_1 峰附近爬坡，然后离开 A_1 峰向主峰爬去。同样，在 A_2 峰附近爬坡时，也能离开局部峰向主峰爬去。因此，本方法不仅能够克服前人方法的缺点搜索到最优码，而且不管初始码如何，总能达到总体最优。

为了验证本方法的这一优点，对 $N = 13$ 的二相码进行实验。选取三种初始码，搜索过程与优化结果见表 1、表 2 和表 3。从三个表可见，初始码选取的不同，搜索总体最优码(这里为 $N = 13$ 的巴克码)的搜索次数不同，但当搜索次数超过 1340 次时，均能达到总体最优码。因此，在选码时，不需要象 Indiresan 等人的方法那样，在选码前精心挑选初始二相码。

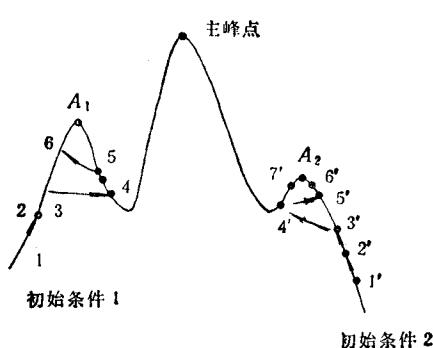


图 1 P. V. Indiresan 方法的搜索过程

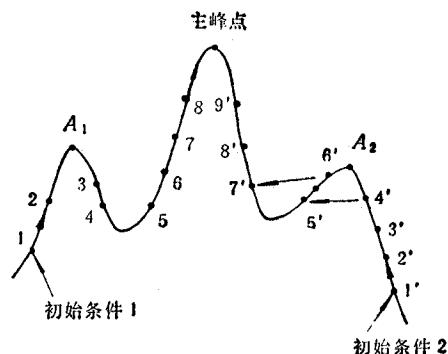


图 2 新方法的搜索过程

(2) 与 J. Lindner 方法相比，本方法搜索到最优码的搜索次数大大减少。因为 J. Lindner 方法实际上是穷举法，因此计算量特别大，而本法仅仅以模拟退火的方式搜索很少一部分空间，因此计算量大大减少。

为了验证上述结论，我们对码长为 $N = 10-25$ 的二相码进行了优选。为了消除初始码不同而引起的影响，任取 10 个初始码，将其搜索到最优二相码所需要的搜索次数取平均作为搜索到最优二相码的搜索次数。实验结果与 J. Lindner 方法的比较见表 4。在

表 1 初始码为 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 相应的旁瓣峰值为 12

迭代次数	旁瓣峰值	挑选的二相码										二相码的旁瓣值						
		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	8	7	6	5	4	3
1	8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	4,	5,	4,	3,	6,	5,
2	6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	4,	5,	4,	3,	2,	1,
3	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,	1,	2,	5,	4,	-1,
4	4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-4,	1,	2,	3,	2,	-3,
16	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,	1,	2,	-3,	0,	1,
99	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2,	-1,	2,	-1,	0,	-1,
172	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,	1,	0,	1,	0,	1,

表2 初始码为1,1,1,1,1,1,-1,-1,-1,-1,-1,1 旁瓣峰值为10

表3 初始码为1,-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,1,1,1,1旁瓣峰值为8

表 4 中, s_m 表示二相码的旁瓣峰值, M 表示搜索到最优码的平均搜索次数。由表 4 可见, 本方法在搜索到最优码的前提下, 能使搜索时间节省很多甚至达三、四个数量级。

表 4 不同搜索方法的比较

码 长 (N)	本 文 方 法		J. Lindner 方 法		时 间 节 省
	s_m	M	s_m	M	
10	2	100	2	1024	10.24
11	1	1250	1	2048	1.64
12	2	50	2	4096	82
13	1	950	1	8192	8.6
14	2	350	2	1.62×10^4	46.3
15	2	650	2	3.64×10^4	56.1
16	2	200	2	7.28×10^4	364
17	2	750	2	14.5×10^4	193
18	2	9500	2	2.9×10^5	31
19	2	14800	2	5.8×10^5	39.2
20	2	10000	2	1.16×10^6	116
21	2	18000	2	2.32×10^6	129
22	3	1500	3	4.64×10^6	3.1×10^3
23	3	700	3	9.28×10^6	1.04×10^4
24	3	500	3	1.86×10^7	3.72×10^4
25	2	700	2	3.72×10^7	5.3×10^4

(3) 本方法易于做到优化程度与计算代价的折衷, 这使优选高压缩比二相码成为可能。用 P. V. Indiresan 等人的方法搜索到的二相码的旁瓣太高, 而且强烈地依赖于初始码的选取; 而用 J. Lindner 的方法, 计算代价又太高; 因此都不能用来优选高压缩比的二相码。本方法能在计算代价许可的情况下, 优选出较好的二相码。表 5 给出了实验结果。由表 5 可见, 在搜索次数较少的情况下, 能搜索旁瓣很低的二相码。当码长 $N = 49$ 时, $s_m = 4$, 当 $N = 64$ 时 $s_m = 8$, 而当 $N = 121$, $s_m = 10$ 。这一结果用 Indiresan 等人方法是不可能得到的。若用 J. Lindner 方法, 设 $N = 64$, 则搜索次数为 $M = 1.84 \times 10^{19}$; 即使在大型计算机上也难以实现。

由上述讨论可见, 本方法不仅能搜索到全局最优码, 而且计算代价较低, 同时能够很容易调解优化程度和计算代价之间的矛盾, 因此, 本方法具有较大的理论和应用价值。

表 5

码长 $N = 49$, 旁瓣峰值 $s_m = 4$, 搜索次数 $M = 36600$

挑选的二相码																		
-1	1	-1	1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	1	1	-1	-1
1	-1	-1	1	1	1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1
-1	1	1	1	1	-1	1	-1	1										

二相码的相关函数																		
-2	-1	4	1	4	-1	0	3	-4	1	2	1	4	3	-2	3	2	3	4
-4	3	4	-1	-2	1	2	-3	0	1	2	-1	2	3	2	1	0	3	0
2	-3	2	-3	4	-3	2	-1											

 $N = 100, s_m = 8, M = 75050$

挑选的二相码																		
-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1
-1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1
-1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1
-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	1
-1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	1	1

二相码的相关函数																		
-7	2	3	-8	1	0	-3	-8	-1	8	-3	2	3	-8	-3	-2	-5	4	-5
-3	0	-3	-4	-1	-2	-7	2	7	-2	5	-4	-3	2	1	0	-1	-2	1
-3	-6	1	0	-7	-8	3	4	7	4	1	4	1	-4	-1	0	-1	-2	-5
-5	2	5	-4	7	-6	3	4	-1	-2	-7	6	3	2	1	-4	3	0	7
1	8	-3	6	-1	-8	1	2	-5	-4	1	-4	-1	0	-5	0	1	-2	-1

 $N = 64, s_m = 6, M = 75050$

挑选的二相码																		
1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1
-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	1	1	1															

二相码的相关函数																		
-5	-2	-1	2	-5	2	-3	-2	-1	-6	-3	4	-1	6	-1	-2	-1	-2	-1
-1	-4	5	-4	-3	4	3	0	1	-6	-5	-6	5	2	3	-4	5	0	-5
3	0	5	-4	-3	-2	5	-2	-3	-2	-3	-4	-1	2	-3	2	3	-2	1
1	2	1																

 $N = 121, s_m = 10, M = 5050$

挑选的二相码																		
1	1	1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1
1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	1	-1
-1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1
1																		

二相码的相关函数																		
0	5	-8	1	0	5	-8	1	8	3	-10	-9	8	1	-4	-1	6	-5	10
6	-9	8	-7	6	7	-6	-5	-6	7	-6	7	-6	7	-6	7	-8	-5	-6
-4	-1	-2	-3	6	1	-6	-9	-6	-9	-8	1	2	-3	8	7	-2	-7	0
-2	9	-4	7	-2	1	-8	-9	8	-3	2	-1	-2	-5	4	-5	4	7	-6
-2	-9	2	-3	2	3	2	3	-2	-1	-2	7	-2	-1	-10	-5	0	5	-2
0	-1	6	7	2	5	0	-3	2	-1	2	-3	0	-7	0	-3	0	1	0

五、结束语

本文提出了二相码选码的模拟退火算法。理论和实验结果表明,本方法比现有方法优越。实验发现,本方法具有如下特点:(1)搜索到最优码的搜索次数大大减少。在有些情况下,时间可节省三到四个数量级;(2)不管选取何种初始二相码,均可以搜索到最优二相码;(3)能够搜索到现有方法搜索不到的低旁瓣二相码,而且能够控制优化程度,达到搜索时间与优化程度的折衷。

参考文献

- [1] A. M. Boehmer, *IEEE Trans. on IT*, IT-13(1967), 156—167.
- [2] P. V. Indiresan, et al., *J. of Optimization Theory and Application*, 7(1971), 90—108.
- [3] U. Somaini, *IEEE Trans. on AES*, AES-11(1975), 1226—1231.
- [4] J. Lindner, *Electronics Lett.*, 11(1975)21, 507.
- [5] N. Metropolis, et al., *J. Chem. Phys.* 21(1953), 1087.
- [6] S. Kirkpatrick, et al., *Science* 220(1983), 671—680.
- [7] E. Bonomi, et al., *SIAM Review*, 26(1984), 551.
- [8] R. W. Klein, et al., *Pattern Recog.*, 22(1989)2, 21 213—220.
- [9] G. K. Atkin, et al., *Pattern Recog.*, 22(1989)4, 461—466.

SIMULATED-ANNEALING-BASED SELECTION OF BINARY CODES

Li Bingcheng

(Southeast University, Nanjing)

Abstract Binary code signal have been widely used in various radars due to their simple implementation, but the selection of the binary codes with high compression ratio and low side-lobes is not well solved, because of the difficult processing in mathematics and expensive calculation cost. In this paper, neural computing is introduced into the field of the selection of binary codes, and a new method based on simulated annealing is proposed. The experiments show that the proposed method is able to select the optimal binary codes with much less time than the known methods, furthermore the optimization of selection of the binary codes versus the calculation cost trade-off is easier.

Key words Binary Codes; Selecting codes; Side lobe; Simulated Annealing