确定 S_{BOS} 对称序列左右界顶点子集的一个通项公式

林柏钢　　　　林　辉
(福州大学电气系，福州　350002)　(闽江大学，福州　350002)

摘要　根据本文作者之一(1991)提出的 S_{BOS} 相邻逻辑对称序列的性质，给出确定 S_{BOS} 对称序列左右界两顶点子集的一个通项公式。这对于利用"对跳定界搜索"法快速实现 S_{BOS} 对称序列，提供了一个选择定界范围和实用算法的依据。

关键词　$S^{B_1}_{BOS}$ 定界序列；$S^{I_1}_{BOS}$ 定界辅助序列；通项公式

1. 引言

文献[1]介绍了"对跳定界搜索"法实现 S_{BOS} 相邻逻辑对称序列的构造问题，其中对于高维数情形，如何确定左右界顶点子集的排列，即选择定界范围比较麻烦。为了解决这一困难，本文给出一个确定 S_{BOS} 对称序列左右界顶点子集的通项公式，可作为选择定界范围的参照依据。

2. 定理的引出[2]

定义1　若序列完全由布尔序集相邻逻辑路径中的某规则组成，则称为 S_{BOS} 的 B 类序列，记作 $S^{B_i}_{BOS}(i=1,2,3,\cdots)$.

定义2　若序列基于 S_{BOS} 的 B 类序列的一类相关序列，则称为 S_{BOS} 的 I 类序列，记作 $S^{I_j}_{BOS}(j=1,2,3,\cdots)$.

根据上述定义，可以给出：

定义3　形如：0,1,3,2,6,4,12,8,24,16,48,32,96,64,192,128,……序列，称为 S_{BOS} 的定界序列，记作 $S^{B_1}_{BOS}$.

定义4　形如：1,2,3,4,6,8,12,16,24,32,48,96,128,192,……序列，称为 S_{BOS} 定界辅助序列，记作 $S^{I_1}_{BOS}$.

现在，我们可以进一步给出，$S^{I_1}_{BOS}$ 和 $S^{B_1}_{BOS}$ 序列的通项公式。

定理1　当 $n\geqslant 2$ 时，对于 $S^{I_1}_{BOS}$ 序列，则有

$$a^{I_1}_n=[5-(-1)^n]\cdot 2^{[(2n-9+(-1)^n)/4]} \tag{1}$$

另设初始边界条件：$a_1=1$，则当 $n\geqslant 2$ 时，(1)式即为 $S^{I_1}_{BOS}$ 序列的通项公式。

1992.01.24收到，1992.10.19定稿。

林柏钢　男，1963年生，讲师，现从事工业自动化领域的PLC和微机的教学研究工作。兴趣为图论(并行)算法、组合编码、AI技术和分维理论研究。
林　辉　男，1966年生，现从事中文信息处理工作。兴趣为汉字信息处理、组合数学应用。

定理 2　当 $n \geqslant 2$ 时，对于 $S_{BOS}^{B_1}$ 序列，则有

$$a_n^{B_1} = [5-(-1)^n] \cdot 2^{[((-1)^{n-1}-1)/2]} \cdot 2^{[(2n-9+(-1)^n)/4]} \tag{2}$$

另设初始边界条件：$a_1 = 0$，则当 $n \geqslant 2$ 时，(2)式即为 $S_{BOS}^{B_1}$ 序列的通项公式。

3. 定理的证明[3,4]

(1) 定理 1 的证明　分析 $S_{BOS}^{I_1}$ 序列可以看出，从序列的第 2 项起，偶数序列关系呈 2^K 规律变化，奇数序列呈 $3 \cdot 2^{K-1}$ 规律变化，由此可写出

$$a_n^{I_1} = \begin{cases} 1, & \text{当 } n = 1 \text{ 时}, \\ 2^K, & n = 2t,\ t = 1,2,3,\cdots \text{时},\ K = 1,2,3,\cdots \\ 3 \cdot 2^{K-1}, & n = 2t+1,\ t = 1,2,3,\cdots \text{时},\ K = 1,2,3,\cdots \end{cases}$$

不妨令 $a_{2n}^{I_1} = 2^K = 2 \cdot 2^{K-1}$，当 $n = 2t = 2K$，$K = n/2$ 时，则有

$$a_n^{I_1} = 2 \cdot 2^{(n/2)-1} \tag{3}$$

又令 $a_{2n+1}^{I_1} = 3 \cdot 2^{K-1} = 2 \cdot 2^{K-1} + 2^{K-1}$，当 $n = 2t+1 = 2K+1$，$K = (n-1)/2$ 时，则有

$$a_n^{I_1} = 2 \cdot 2^{[((n-1)/2)-1]} + 2^{[(n-1)/2-1]} \tag{4}$$

首先我们注意到 $a_{2n}^{I_1}$ 与 $a_{2n+1}^{I_1}$ 中 $K-1$ 的相互关系，因而有

$$K-1 = \begin{cases} n/2-1 = (n-2)/2 + k_n, (\text{当 } n = 2K, K = 1,2,3,\cdots) \\ (n-1)/2-1 = (n-2)/2 - k_n/2, (\text{当 } n = 2K+1, K = 1,2,3,\cdots) \end{cases} \tag{5}$$

根据(5)式，如果当 $n = 2K$ 时，k_n 取0；$n = 2K+1$ 时，k_n 取 1，则有下式

$$K-1 = (n-2)/2 - [(1-(-1)^n)/2]/2 \tag{6}$$

成立。综合(3)，(4)，(5)，(6)式条件，最后可得出

$$\begin{aligned} a_n^{I_1} &= [2+(1-(-1)^n)/2] \cdot 2^{[(n-2)/2-(1-(-1)^n)/4]} \\ &= [(5-(-1)^n)/2] \cdot 2^{[(2n-5+(-1)^n)/4]} \\ &= [5-(-1)^n] \cdot 2^{[(2n-9+(-1)^n)/4]} \end{aligned} \tag{7}$$

另设初始边界条件：$a_1 = 1$，则当 $n \geqslant 2$ 时，(7)式即为 $S_{BOS}^{I_1}$ 序列的通项公式。故定理 1 得证。

(2) 定理 2 的证明　比较 $S_{BOS}^{I_1}$ 序列可以看出，从 $S_{BOS}^{B_1}$ 序列的第 2 项起，偶数序列关系呈 $2^K/2$ 规律变化，正好是 $S_{BOS}^{I_1}$ 序列偶数情形的一半。而奇数序列则同 $S_{BOS}^{I_1}$ 序列一样，呈 $3 \cdot 2^{K-1}$ 规律变化。

因此，只要设法让 $n = 2K$ 时，使其为 $a_n^{I_1}/2$；当 $n = 2K+1$ 时，保持 $a_n^{I_1}$ 不变。即系数 k_n 为 $2^0, 2^{-1}, 2^0, 2^{-1}, 2^0 \cdots$ 分布。

首先令

$$k_n = 2^{[((-1)^{n-1}-1)/2]} \tag{8}$$

这样可保证：当 $n = 2K$，$K = 1,2,3,\cdots$ 时，$k_n \equiv 2^{-1} = 1/2$

$n = 2K+1$，$K = 1,2,3,\cdots$ 时，$k_n \equiv 2^0 = 1$

所以，综合上述条件，可得

$$\begin{aligned} a_n^{B_1} &= k_n \cdot a_n^{I_1} \\ &= [5-(-1)^n] \cdot 2^{[((-1)^{n-1}-1)/2]} \cdot 2^{[(2n-9+(-1)^n)/4]} \end{aligned} \tag{9}$$

另设初始边界条件 $a_1 = 0$，则当 $n \geq 2$ 时，(9)式即为 $S^{B_1}_{B_1S}$ 序列的通项公式. 故定理 2 证毕.

4. 结束语

S^{B}_{BOS} 定界序列的通项公式解决了选择定界范围的困难，不管是用计算机实现还是手工实现，都提供了一个简便而实用公式. 实际上，$S^{B_1}_{BOS}$ 定界序列还是一个很好的相邻编码序列，这里就不再赘述了. 表 1 可供选择参考使用.

表 1　$n = 2\sim 32$ 时对应的 a_n 值

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$a_n(10)$	1	3	2	6	4	12	8	24	16	48	32	96	64	192	128	384	256	768
$a_n(16)$	1	3	2	6	4	c	8	18	10	30	20	60	40	c0	80	180	100	300

n	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
$a_n(10)$	512	1536	1024	3072	2048	6144	4096	12288	8192	24576	16384	49152	32768
$a_n(16)$	200	600	400	c00	800	1800	1000	3000	2000	6000	4000	c000	8000

注：$a_n(16)$，c，c0，c00，c000 是十六进制表达方式

参　考　文　献

[1] 林柏钢，电子科学学刊，**13**(1991)5，502—508.

[2] 林柏钢，电子科学学刊，**12**(1990)2，146—151.

[3] (美) C. L. Lin 著，魏万迪译，组合数学导论，四川大学出版社，成都，1987 年 11 月，第 41—63 页.

[4] 李宇寰编著，组合数学，北京师范学院出版社，北京，1988 年 11 月，第 94—133 页.

A GENERAL FORMULA FOR DETERMINING THE VERTEX SUBSET OF LEFT AND RIGHT BOUNDS OF S_{BOS} SYMMETRICAL SEQUENCE

Lin Bogang　　Lin Hui

(*Fuzhou University, Fuzhou* 350002)　(*Mingjiang University, Fuzhou* 350002)

Abstract　According to the quality of symmetrical sequence for S_{BOS} neighbouring logic, a general formula for determining the vertex subset of left and right bounds of S_{BOS} bound sequence is given. A foundation of practical algorithm which can be used to select the bound range is provided for fast realizing S_{BOS} symmetrical sequence with the method of "search of bounce bound".

Key words　$S^{B_1}_{BOS}$ bound sequence; Supplementary sequence of $S^{I_1}_{BOS}$ bound; General formula