

求解埋人体电磁散射问题的矢量波函数展开法*

陈景养 徐鹏根 鲁述

(武汉船舶通信研究所, 武汉) (武汉大学, 武汉)

摘要 本文利用矢量波函数展开法求解了任意激励源埋入体的电磁散射问题。通过导出圆柱和圆球矢量波函数的转换关系,使场量满足分界平面和数学球面边界条件,从而方便地利用矢量波函数展开求解了这一复杂边值问题。作为示例,本文计算了在平面波和偶极子激励下,埋入导体球和介质球的散射场。

关键词 电磁散射;埋人体;边界条件;矢量波函数;波变换

一、引言

埋人体的边值问题在自然资源探测与遥感和理论分析上都有很重要的意义。Chang 和 Mei^[1,2] 利用多极子展开求解了这一问题;周学松^[3] 对上述展式的完备性问题作了进一步的研究。本文讨论用矢量波函数展开求解这一问题的方法。

矢量波函数展开法作为一种数学分析方法,已建立起一整套有效的计算手段。但这一方法早先只能用于解决一些典型的边值问题,如用于研究圆柱波导中的电磁波传输,导体或介质圆柱体在自由空间的电磁散射以及平直地面等边值问题。它可以方便地利用圆柱矢量波函数求得正确解。它如利用球矢量波函数展开,则可严格地求解电、磁极子或多极子的辐射,导体或介质球体在自由空间的电磁散射等边值问题^[4]。当两类边值问题混合在一起时,如图 1 所示的任意激励源埋入体的散射问题,单用圆柱矢量波函数或单用圆球矢量波函数就难以求解;但利用这两类矢量波函数的转换关系,则可方便地利用矢量波函数展开求解这类混合边值问题。

矢量波函数展开和多极子展开同属本征函数展开法,它们具有相同的收敛速度。这是因为在多极子展开式中,除了电、磁垂直偶极子外,还需要加入最低模式的水平旋转偶极子才能构成完备系统;而在矢量波函数展开法中,只需要用两种 Hansen 矢量波函数(\vec{M} 、 \vec{N})便可完备地展开散射场。但是 n 阶矢量波函数可展开为 $(n-1)$ 以下各阶垂直偶极子和最低阶水平旋转偶极子的叠加,因此在一致收敛的意义上,这两种本征函数展开法所需要确定的展开系数的个数相同。然而在矢量波函数展开法中,只需要考虑两种本征分

1989 年 11 月 12 日收到, 1990 年 7 月 2 日修改定稿。

* 国家自然科学基金资助项目。

量的介质分界平面的影响,而在多极子展开法中,则需要考虑四种。

本文所使用的时谐函数为 $e^{i\omega t}$ 。圆柱和圆球矢量波函数分别表示为 $(\bar{M}, \bar{N})_{c_{m\lambda}}(u)$ 和 $(\bar{M}, \bar{N})_{c_{mn}}(k)$ 。

二、圆柱和圆球矢量波函数的转换关系

电磁场理论中,用矢量波函数求解 Helmholtz 方程时,领示矢量和波函数必须遵从一定判据,否则将构成不完备系统,即非标准矢量波函数^[3]。下文利用波变换,借助非标准矢量波函数的概念,推导圆柱与圆球矢量波函数的转换关系。

1. 圆柱矢量波函数展开为圆球矢量波函数

由圆柱谐波函数展开为圆球谐波函数的关系式^[4]可以得到

$$(\bar{M}, \bar{N})_{c_{m\lambda}}(u) = k \sum_{n=m}^{\infty} j^{n-m} (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^n \left(j \frac{u}{k} \right) (\bar{M}, \bar{N})_{c_{mn}}^{(z)}(k) \quad (1)$$

其中 $(\bar{M}, \bar{N})_{c_{mn}}^{(z)}(k)$ 为非标准圆球矢量波函数^[4]。

$$\begin{aligned} (\bar{M}, \bar{N})_{c_{mn}}^{(z)}(k) = & \mp \frac{m}{n(n+1)} (\bar{N}, \bar{M})_{c_{mn}}(k) \\ & + \frac{1}{2n+1} \left[\frac{n-m+1}{n+1} (\bar{M}, \bar{N})_{c_{m(n+1)}}(k) \right. \\ & \left. + \frac{n+m}{n} (\bar{M}, \bar{N})_{c_{m(n-1)}}(k) \right] \end{aligned} \quad (2)$$

将(2)式代入(1)式可得

$$(\bar{M}, \bar{N})_{c_{m\lambda}}(u) = \sum_{n=m}^{\infty} [a_{mn}(u) (\bar{M}, \bar{N})_{c_{mn}}(k) \mp b_{mn}(u) (\bar{N}, \bar{M})_{c_{mn}}(k)] \quad (3)$$

其中

$$u = \sqrt{\lambda^2 - k^2}$$

$$a_{mn}(u) = j^{n-m+1} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left[\frac{n-m+1}{n+1} P_{n+1}^n \left(j \frac{u}{k} \right) - \frac{n+m}{n} P_{n-1}^n \left(j \frac{u}{k} \right) \right] \quad (4a)$$

$$b_{mn}(u) = j^{n-m} \frac{m(2n+1)}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^n \left(j \frac{u}{k} \right) \quad (4b)$$

2. 圆球矢量波函数展开为圆柱矢量波函数

由非标准圆球矢量波函数的定义(2)式和

$$(\bar{M}, \bar{N})_{c_{mn}}(k) = m(2m-1) [(\bar{M}, \bar{N})_{c_{(m-1)(m-1)}}^{(z)}(k) \mp (\bar{M}, \bar{N})_{c_{(m-1)(m-1)}}^{(y)}(k)] \quad (5)$$

再利用数学归纳法,可以得到

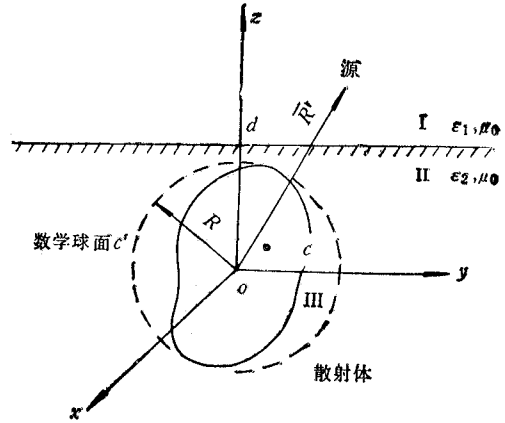


图1 埋人体散射问题的结构图

$$(\bar{M}, \bar{N})_{\sigma_{m(m+i+1)}}(k) = \sum_{l=0}^i \{\text{sign}\} \alpha_{m(i-l)} C_{m(i-l+1)} \bar{P}_{m(m+i-l)}^{(x)}(k) + \{\text{sign}\} \cdot m(2m-1) C_{m0} \bar{R}_{m(m-1)(m-1)}^{(xy)}(k) \quad (6)$$

其中

$$\bar{P}_{m(m+i-l)}^{(x)}(k) = \begin{cases} (\bar{M}, \bar{N})_{\sigma_{m(m+i-l)}}^{(x)}(k), & l \text{ 为偶数} \\ (\bar{N}, \bar{M})_{\sigma_{m(m+i-l)}}^{(x)}(k), & l \text{ 为奇数} \end{cases} \quad (7a)$$

$$\bar{R}_{m(m-1)(m-1)}^{(xy)}(k) = \begin{cases} (\bar{N}, \bar{M})_{\sigma_{(m-1)(m-1)}}^{(x)}(k) \pm (\bar{N}, \bar{M})_{\sigma_{(m-1)(m-1)}}^{(y)}(k), & i \text{ 为偶数} \\ (\bar{M}, \bar{N})_{\sigma_{(m-1)(m-1)}}^{(x)}(k) \mp (\bar{M}, \bar{N})_{\sigma_{(m-1)(m-1)}}^{(y)}(k), & i \text{ 为奇数} \end{cases} \quad (7b)$$

$$\{\text{sign}\} = \begin{cases} + \\ \pm \\ - \\ \mp \end{cases} \begin{cases} l = 4n + 1 \\ l = 4n + 2 \\ l = 4n + 3 \\ l = 4n + 4 \end{cases}, \quad n \text{ 为整数}$$

$\alpha_{mn} = (2m + 2n + 1)(m + n + 1)/(n + 1)$; 系数 C_{mn} 可由递推公式 $C_{m(i+1-n)} = [\beta_{m(i+1-n)} C_{m(i+2-n)} + \gamma_{m(i+1-n)} C_{m(i+3-n)}]$ 计算; $\beta_{mn} = m(2m + 2n + 1)/[(n + 1)(m + n)]$; $\gamma_{mn} = (2m + n + 1)(m + n + 2)/[(n + 2)(m + n + 1)]$.

(6) 式表明, n 阶圆球矢量波函数 $(\bar{M}, \bar{N})_{\sigma_{mn}}(k)$ 可以展开为 $(n - 1)$ 以下各阶垂直偶极子加上 $(m - 1)$ 阶水平旋转偶极子。这一展式证明了多极子展开的完备性。并可从中看出, 矢量波函数展开和多极子展开的收敛性一致。此外(6)式还表明, 当问题对于 z 轴旋转对称时, Helmholtz 方程的特征值 m 为零, 这时水平旋转偶极子消失, 垂直多极子可单独构成一个完备系统。这一结论符合物理意义。

从(6)式出发, 利用 Hankel 积分变换^[4]可以得到

$$(\bar{M}, \bar{N})_{\sigma_{m(m+i+1)}}(k) = \sum_{l=0}^i \{\text{sign}\} \alpha_{m(i-l)} C_{m(i-l+1)} \int_0^{\infty} f_{m(m+i-l)}(\lambda) \bar{P}_{m\lambda}(u) d\lambda + \{\text{sign}\} \cdot m(2m-1) C_{m0} \int_0^{\infty} f_{m(m-1)(m-1)}(\lambda) \bar{R}_{m\lambda}(u) d\lambda \quad (8)$$

其中

$$\bar{P}_{m\lambda}(u) = \begin{cases} (\bar{M}, \bar{N})_{\sigma_{m\lambda}}(u), & l \text{ 为偶数} \\ (\bar{N}, \bar{M})_{\sigma_{m\lambda}}(u), & l \text{ 为奇数} \end{cases} \quad (9a)$$

$$\bar{R}_{m\lambda}(u) = \begin{cases} \frac{u}{\lambda} (\bar{N}, \bar{M})_{\sigma_{m\lambda}}(u) \pm \frac{k}{\lambda} (\bar{M}, \bar{N})_{\sigma_{m\lambda}}(u), & i \text{ 为偶数} \\ \frac{u}{\lambda} (\bar{M}, \bar{N})_{\sigma_{m\lambda}}(u) \mp \frac{k}{\lambda} (\bar{N}, \bar{M})_{\sigma_{m\lambda}}(u), & i \text{ 为奇数} \end{cases} \quad (9b)$$

$$f_{mn}(\lambda) = \frac{\lambda}{ku} j^{n-m+1} P_n^n \left(-j \frac{u}{k} \right)$$

从(8)式可以看出, 圆球矢量波函数 $(\bar{M}, \bar{N})_{\sigma_{mn}}(k)$ 可以展开为特征值 λ 连续变化的圆柱矢量波函数 $(\bar{M}, \bar{N})_{\sigma_{m\lambda}}(u)$ 的叠加, 另一特征值 m 固定不变。

三、埋入体电磁散射场的计算

考虑如图 1 所示的埋入体。假设散射体被一半径为 R 的数学球面所包围, 分层界面 $z = d$ 。上半空间为区域 I, 媒质参数为 ϵ_1, μ_0 ; 下半空间为区域 II, 媒质参数为 ϵ_2, μ_0 ; 数学球面内部空间为区域 III, 球心位于坐标原点。

区域 II 内的散射场 $\bar{E}^{SII}, \bar{H}^{SII}$ 可分为初级散射场 $\bar{E}^{Pri}, \bar{H}^{Pri}$ 和次级散射场 $\bar{E}^{Sec}, \bar{H}^{Sec}$ 两部分。初级散射场是由激励场投射到球面上产生的。它们可展开为圆球矢量波函数

$$\left. \begin{aligned} \bar{E}^{Pri} &= \sum_m \sum_n (A_{\epsilon_{mn}} \bar{M}_{\epsilon_{mn}} + B_{\epsilon_{mn}} \bar{N}_{\epsilon_{mn}}) \\ \bar{H}^{Pri} &= \sum_m \sum_n (A_{\epsilon_{mn}} \bar{N}_{\epsilon_{mn}} + B_{\epsilon_{mn}} \bar{M}_{\epsilon_{mn}}) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

次级散射场是由初级散射场投射到分层界平面上产生的。将(10)式中的圆球矢量波函数展开为圆柱矢量波函数, 再由平面边界条件便可求得 I、II 区域的次级散射场^[2,6]。(10)式的展开系数一经确定, 各级散射场便可计算出来。

为了便于在数学球面上匹配边界条件, 需要将激励场展开为圆球矢量波函数。但通常都用圆柱矢量波函数表示分层介质中源的激励场^[4]。将圆柱矢量波函数展开为圆球矢量波函数便可得到

$$\bar{G}(\bar{R}, \bar{R}') = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} [\bar{M}_{\epsilon_{mn}}(k_2) \bar{A}_{\epsilon_{mn}}(u_2, u_1) + \bar{N}_{\epsilon_{mn}}(k_2) \bar{B}_{\epsilon_{mn}}(u_2, u_1)] \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{A}_{\epsilon_{mn}}(u_2, u_1) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{2 - \delta_0}{\lambda u_1} \left[\frac{2u_1}{u_1 + u_2} a_{mn}(-u_2) \bar{M}_{\epsilon_{m\lambda}}(u_1) \right. \\ &\quad \left. \pm \frac{k_1}{k_2} \frac{2\epsilon_2 u_1}{\epsilon_2 u_1 + \epsilon_1 u_2} b_{mn}(-u_2) \bar{N}_{\epsilon_{m\lambda}}(u_1) \right] e^{-u_2 d} d\lambda \end{aligned} \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} \bar{B}_{\epsilon_{mn}}(u_2, u_1) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{2 - \delta_0}{\lambda u_1} \left[\frac{k_1}{k_2} \frac{2\epsilon_2 u_1}{\epsilon_2 u_1 + \epsilon_1 u_2} a_{mn}(-u_2) \bar{N}'_{\epsilon_{m\lambda}}(u_1) \right. \\ &\quad \left. \pm \frac{2u_1}{u_1 + u_2} b_{mn}(-u_2) \bar{M}'_{\epsilon_{m\lambda}}(u_1) \right] e^{-u_2 d} d\lambda \end{aligned} \quad (12b)$$

$$\delta_0 = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases}$$

(11)式为用圆球矢量波函数表示的 Sommerfeld 半空间问题的并矢 Green 函数, 由此可以推导出平面波和偶极子的激励场。平面波圆球矢量波函数展开式在一般教科书上可以找到^[4,7], 这里不再列出。对于偶极子激励源, 以水平偶极子 $I dl = \hat{x} 4\pi k_1^2 I_0 \delta(x) \delta(y) \delta(z - z_0) / j\omega \mu_0$ 为例, 其激励场可由(11)式求得

$$\bar{E}^{inc} = I_0 \sum_{n=1}^{\infty} [g_{1n}(u_2, u_1) \bar{M}_{\epsilon_{01n}}(k_2) + g_{2n}(u_2, u_1) \bar{N}_{\epsilon_{01n}}(k_2)] \quad (13)$$

其中

$$g_{1n}(u_2, u_1) = k_1 \int_0^\infty \left[\frac{k_1}{u_1} \cdot \frac{2u_1}{u_1 + u_2} a_{1n}(-u_2) - \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{2\varepsilon_2 u_1}{\varepsilon_2 u_1 + \varepsilon_1 u_2} b_{1n}(-u_2) \right] \times e^{-u_1 z_1 - u_2 z_2} dz \quad (14a)$$

$$g_{2n}(u_2, u_1) = k_1 \int_0^\infty \left[\frac{k_1}{u_1} \cdot \frac{2u_1}{u_1 + u_2} b_{1n}(-u_2) - \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{2\varepsilon_2 u_1}{\varepsilon_2 u_1 + \varepsilon_1 u_2} a_{1n}(-u_2) \right] \times e^{-u_1 z_1 - u_2 z_2} dz \quad (14b)$$

上述推导所得到的埋入体散射场展开式满足平面边界条件, 其展开系数可由数学球面上的边界条件确定. 按照单矩法^[8], 数学球面内部场可利用有限元法解出, 再选用权函数 $w_m = \sin \theta P_m^m(\cos \theta) \frac{\sin m\phi}{\cos \theta}$, $m = 0, 1, 2, \dots$; $r = m, m+1, m+2, \dots$ 在球面上对边界条件方程作内积分, 取一定 N, M 值即可得到一组线性方程, 求解该线性方程组便可确定展开系数.

四、数值计算结果

根据上述分析, 我们编制了埋入导体球散射场的计算程序. 作为示例, 数值计算了在垂

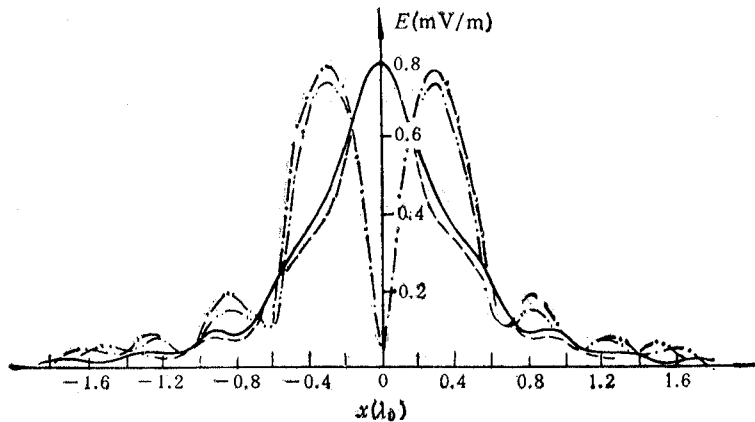


图 2 埋入导体球散射场沿 x 轴分布曲线实线和点划线分别为在平面波激励下 E_x 和 E_z 的数据; 虚线和双点划线分别为在偶极子激励下 E_x 和 E_z 的数据

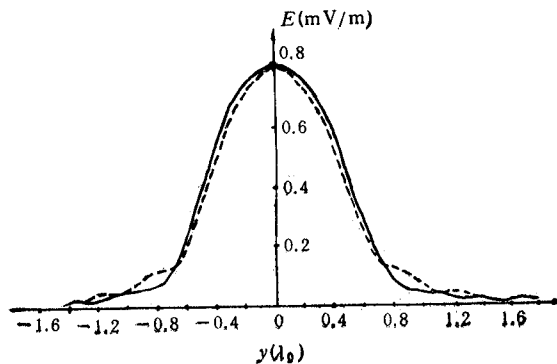


图 3 埋入导体球散射场沿 y 轴分布曲线实线和虚线分别为在平面波和偶极子激励下 E_x 的数据

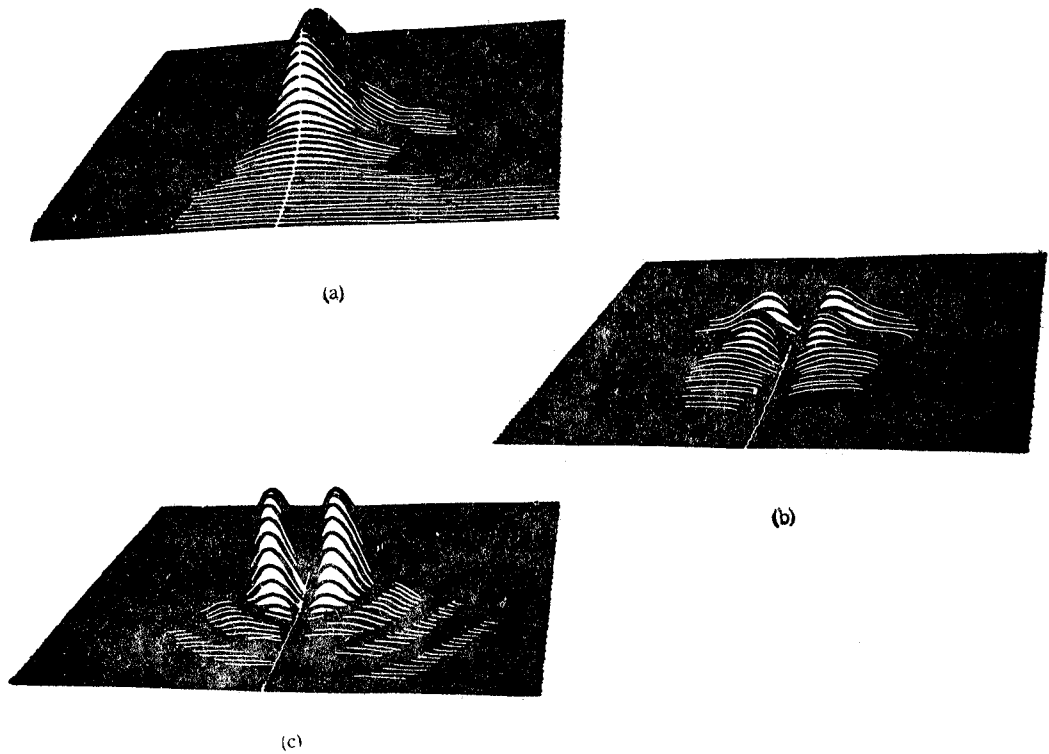


图 4 在偶极子激励下,埋入介质球散射场的地面分布图。
(a) 为 E_x 分布图; (b) 为 E_y 分布图; (c) 为 E_z 分布图。

直入射平面波和球正上方水平偶极子激励下,导体球和介质球在地面上的散射场。计算中,选择大地介质参数 $\epsilon_2 = 15 - j1.5$, 球体半径 $R = 0.2\lambda_0$, 球中心埋地深度 $d = 0.5\lambda_0$, 介质球介质参数 $\epsilon_3 = 3.0$ 。

图 2—图 3 给出了埋入导体球散射场沿 x 和 y 轴的分布曲线。从图中可以看出,本文计算结果与文献[2]给出的数据完全一致。

图 4 给出了在水平偶极子激励下,埋入介质球体散射场在地面上的分布图。从图中可以看出一些有意义的结论: 散射场的 E_x 分量在球正上方有一峰值; E_x 分量在 $(\pm 0.3\lambda_0, 0)$ 存在二个峰值,大小与 E_x 峰值相等; 垂直于源场极化方向的 E_y 分量在 $(\pm 0.3\lambda_0, \pm 0.3\lambda_0)$ 存在四个峰值,大小约为 E_x 峰值的 40%。

五、结 论

本文利用矢量波函数展开和圆柱与圆球矢量波函数的转换关系,求解了埋人体的电磁散射问题,并给出了工程上实用的埋入球体散射场分布图。当埋人体为任意形体或不均匀物体时,利用有限元法计算数学球面内部场,对数学球面上的边界条件作加权最小二乘法即可求出展开系数。

矢量波函数展开早先只用于处理一些典型的边值问题。这些问题有一共同特点,即

不同边界上的边界条件用同一坐标系来描述,如平面分层介质,均匀涂层圆柱和圆球的边值问题等,它们都可用同一种矢量波函数来求解。但实际问题往往比较复杂,它们的边界条件通常要用两种或两种以上的坐标系来描述。这时单用同一种矢量波函数就很难求得正确解。如果能建立起各种矢量波函数的转换关系,则可利用矢量波函数方便地求解一些复杂的边值问题,而无需担心展开式的正交完备性。

参 考 文 献

- [1] S. K. Chang, K. K. Mei, *IEEE Trans. on AP*, **AP-28**(1980), 504—512.
- [2] S. K. Chang, K. K. Mei, *Electromagnetics*, **1**(1981), 73—89.
- [3] 周学松, *中国科学A辑*, 1984年,第9期,第841—849页.
- [4] Chen-to Tai, *Dyadic Green's Function in Electromagnetic Theory*, International Textbook Co., (1971).
- [5] J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill Book Co., New York, (1941).
- [6] Alfredo Banos, *Dipole Radiation in the Presence of a Conducting Half-Space*, Pergamon Press. New York, (1966).
- [7] R. F. Harrington, *Time Harmonic Electromagnetic Fields*, McGraw-Hill Book Co., New York, (1961).
- [8] K. K. Mei, *IEEE Trans. on AP*, **AP-22**(1974), 760—766.

VECTOR WAVE FUNCTION EXPANSION FOR ELECTRO-MAGNETIC SCATTERING BY BURIED OBJECTS

Chen Jingyang

(*Wuhan Marine Communication Research Institute, Wuhan*)

Xu Penggen Lu Shu

(*Wuhan University, Wuchang*)

Abstract An analysis of solving the electromagnetic scattering by buried objects using the vector wave function expansion is presented. For expanding the boundary conditions both on the planar air-earth interface and on the spherical surface, the conversion relations between the cylindrical and spherical vector wave functions are derived. Hence the vector wave function expansion is conveniently applied to solve this complex boundary value problem. For the excitation of the incident plane wave and the dipole above the earth, the scattering patterns of the buried conducting and dielectric spheres are presented and discussed.

Key words Electromagnetic scattering; Buried object; Boundary condition; Vector wave function; Wave transformation