第5卷 第2期　　电子科学学刊　　Vol. 5, No. 2
1983年3月　　JOURNAL OF ELECTRONICS　　Mar., 1983

不确定观测下线性最小均方误差估计量的递推算法*

王 兴 德**
(中国科学院电子学研究所)

提　　要

对于在不确定观测下的线性离散时间系统，在递推线性最优估计量存在的情况下，本文导出了线性最优滤波器与一步预报器的一种递推公式.

一、引　　言

文献[1]导出了不确定观测下线性离散时间系统中递推线性最优估计量存在的条件. 本文将在这些条件成立的情况下，给出不确定观测下线性最优(即最小均方误差)滤波器与一步预报器的一种递推公式，这些公式与文献[1]中得到的递推公式相比，由于前提不完全相同，所以形式不同.

二、问题的陈述

假设所研究的系统的动态方程和观测方程分别为

$$\boldsymbol{x}_k = \Phi_{k,k-1}\boldsymbol{x}_{k-1} + \boldsymbol{u}_{k-1}, \quad \forall k \geqslant 1; \tag{1}$$

$$\boldsymbol{z}_k = \gamma_k H_k \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{v}_k, \quad \forall k \geqslant 1; \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{x}_k$, $\boldsymbol{u}_k$, $\boldsymbol{z}_k$ 与 $\boldsymbol{v}_k$ 分别是维数为 $n\times 1$, $n\times 1$, $m\times 1$ 与 $m\times 1$ 的向量随机变量，$\Phi_{k,k-1}$ 和 H_k 则分别是维数为 $n\times n$ 和 $m\times n$ 的矩阵. 系统噪声 $\{\boldsymbol{u}_k\}$ 与观测噪声 $\{\boldsymbol{v}_k\}$ 分别具有以下的统计特性:

$$E\boldsymbol{u}_k = 0, \quad E\boldsymbol{u}_k\boldsymbol{u}_j^T = Q_k\delta_{kj}, \quad \forall k, j \geqslant 1; \tag{3}$$

$$E\boldsymbol{v}_k = 0, \quad E\boldsymbol{v}_k\boldsymbol{v}_j^T = R_k\delta_{kj}, \quad \forall k, j \geqslant 1, \tag{4}$$

初态 $\boldsymbol{x}_0$ 是均值为 $\boldsymbol{\mu}_0$, 协方差矩阵为 P_0 的向量随机变量. γ_k 是一个二进制标量随机变量,它只能取 0 与 1 二值,相应的概率分别为:

$$\Pr(\gamma_k = 0) = 1 - p_k, \quad \Pr(\gamma_k = 1) = p_k. \tag{5}$$

此外,再假定下面两个条件成立:

$$\Pr(\gamma_k = 1) = p_k \neq 0, \quad \forall k \geqslant 1; \tag{6}$$

$$\Pr(\gamma_k = 1 | \gamma_j = 1) \text{ 与 } j \text{ 无关}, \ 1 \leqslant j \leqslant k-1, \ k \geqslant 2. \tag{7}$$

---

* 1982年2月23日收到.

** 作者现在工作单位为南开大学管理学系.

最后，我们还假定序列 $\{\boldsymbol{u}_k\}$，$\{\boldsymbol{v}_k\}$，$\{\gamma_k\}$ 与向量 $\boldsymbol{x}_0$ 互相统计独立.

文献[1]已证明，在条件(6)、(7)两式成立时上述系统的递推线性最优估计量是存在的，现在我们要导出基于观测 $\{\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_k\}$ 对于 $\boldsymbol{x}_k$ 与 $\boldsymbol{x}_{k+1}$ 的线性最优估计量 $\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}$ 与 $\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1|k}$ 的递推算法.

三、结 果

在条件(6)、(7)两式成立的情况下，若规定

$$\pi(k) = \begin{cases} \Pr(\gamma_1 = 1), & k = 1; \\ \Pr(\gamma_k = 1 \mid \gamma_{k-1} = 1), & k = 2, 3, \cdots, \end{cases} \tag{8}$$

则关于 $\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}$ 的递推计算公式为：

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k} = F_1(k)\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1|k-1} + F_2(k)\boldsymbol{z}_k, \tag{9}$$

$$F_1(k) = [I - \pi(k)F_2(k)H_k]\Phi_{k,k-1}, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} F_2(k) = {} & [\pi(k)V_{\tilde{x}}(k|k-1) + (\Pr(\gamma_k = 1) - \pi(k))S(k) \\ & - (\Pr(\gamma_k = 1) - \pi(k))\Phi_{k,k-1}\boldsymbol{c}_{k-1}\boldsymbol{\mu}_0^T\Phi_{k,0}^T]H_k^T[R_k \\ & + \pi^2(k)H_kV_{\tilde{x}}(k|k-1)H_k^T + (\Pr(\gamma_k = 1) \\ & - \pi^2(k))H_kS(k)H_k^T - \pi(k)(\Pr(\gamma_k = 1) \\ & - \pi(k))H_k\Phi_{k,k-1}\boldsymbol{c}_{k-1}\boldsymbol{\mu}_0^T\Phi_{k,0}^TH_k^T]^{-1}, \end{aligned} \tag{11}$$

$$S(k) = \Phi_{k,k-1}S(k-1)\Phi_{k,k-1}^T + Q_{k-1}, \tag{12}$$

$$V_{\tilde{x}}(k|k-1) = \Phi_{k,k-1}V_{\tilde{x}}(k-1)\Phi_{k,k-1}^T + Q_{k-1}, \tag{13}$$

$$\begin{aligned} V_{\tilde{x}}(k) = {} & [I - \pi(k)F_2(k)H_k]V_{\tilde{x}}(k|k-1) \\ & - [\Pr(\gamma_k = 1) - \pi(k)]F_2(k)H_kS(k), \end{aligned} \tag{14}$$

$$\boldsymbol{c}_k = F_1(k)\boldsymbol{c}_{k-1}, \tag{15}$$

对于 $k = 1, 2, \cdots$. 初值为：

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{0|0} = \boldsymbol{\mu}_0, \tag{16}$$

$$S(0) = P_0 + \boldsymbol{\mu}_0\boldsymbol{\mu}_0^T. \tag{17}$$

$$V_{\tilde{x}}(0) = P_0, \tag{18}$$

$$\boldsymbol{c}_0 = \boldsymbol{\mu}_0. \tag{19}$$

其中

$$S(k) \triangleq E\boldsymbol{x}_k\boldsymbol{x}_k^T, \tag{20}$$

$$V_{\tilde{x}}(k) \triangleq E(\boldsymbol{x}_k - \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k})(\boldsymbol{x}_k - \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k})^T, \tag{21}$$

$$V_{\tilde{x}}(k|k-1) \triangleq E(\boldsymbol{x}_k - \Phi_{k,k-1}\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1|k-1})(\boldsymbol{x}_k - \Phi_{k,k-1}\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1|k-1})^T. \tag{22}$$

在相同的条件下，$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1|k}$ 的递推计算公式则为：

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1|k} = F_1'(k)\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} + F_2'(k)\boldsymbol{z}_k, \tag{23}$$

$$F_1'(k) = \Phi_{k+1,k} - \pi(k)F_2'(k)H_k, \tag{24}$$

$$\begin{aligned} F_2'(k) = {} & \Phi_{k+1,k}[\pi(k)V_{\tilde{x}}'(k) - (\Pr(\gamma_k = 1) \\ & - \pi(k))S(k) - (\Pr(\gamma_k = 1) - \pi(k))\Phi_{k,k-1}\boldsymbol{c}_{k-1}\boldsymbol{\mu}_0^T\Phi_{k,0}^T]H_k^T[R_k \\ & + \pi^2(k)H_kV_{\tilde{x}}'(k)H_k^T + (\Pr(\gamma_k = 1) - \pi^2(k))H_kS(k)H_k^T \\ & - \pi(k)(\Pr(\gamma_k = 1) - \pi(k))H_k\Phi_{k,k-1}\boldsymbol{c}_{k-1}\boldsymbol{\mu}_0^T\Phi_{k,0}^TH_k^T]^{-1}, \end{aligned} \tag{25}$$

$$S(k+1) = \Phi_{k+1,k}S(k)\Phi_{k+1,k}^T + Q_k, \tag{26}$$

$$V'_{\tilde{x}}(k+1) = [\Phi_{k+1,k} - \pi(k)F'_2(k)H_k]V'_{\tilde{x}}(k)\Phi_{k+1,k}^T - [\Pr(\gamma_k = 1) - \pi(k)]F'_2(k)H_kS(k)\Phi_{k+1,k}^T + Q_k, \tag{27}$$

$$\mathbf{c}_k = \Phi_{k,k+1}F'_1(k)\Phi_{k,k-1}\mathbf{c}_{k-1}, \tag{28}$$

对于 $k = 1, 2, \cdots$. 初值为:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{1|0} = \Phi_{1,0}\boldsymbol{\mu}_0, \tag{29}$$

$$S(0) = P_0 + \boldsymbol{\mu}_0\boldsymbol{\mu}_0^T, \tag{30}$$

$$V'_{\tilde{x}}(1) = \Phi_{1,0}P_0\Phi_{1,0}^T + Q_0, \tag{31}$$

$$\mathbf{c}_0 = \boldsymbol{\mu}_0. \tag{32}$$

其中 $S(k)$ 如(23)式所定义而

$$V'_{\tilde{x}}(k) \triangleq E(\boldsymbol{x}_k - \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})(\boldsymbol{x}_k - \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})^T. \tag{33}$$

四、推　　导

对于 $k \geqslant 2$，在(6)、(7)两式成立的情况下，由正交条件

$$E(\boldsymbol{x}_k - \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k})\boldsymbol{z}_j^T = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, k \tag{34}$$

中的前 $k-1$ 个方程可得到(见文献[1])

$$F_1(k) = [I - \pi(k)F_2(k)H_k]\Phi_{k,k-1}, \quad k \geqslant 2, \tag{35}$$

其中

$$\pi(k) = \Pr(\gamma_k = 1 \mid \gamma_{k-1} = 1), \quad k \geqslant 2.$$

对于 $k = 1$，由估计量 $\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}$ 的无偏性条件可导出 $F_1(1)$ 与 $F_2(1)$ 之间的下列关系:

$$F_1(1) = \Phi_{1,0} - E(\gamma_1)F_2(1)H_1\Phi_{1,0}. \tag{36}$$

由(36)式可看出，只要规定

$$\pi(1) = E(\gamma_1) = \Pr(\gamma_1 = 1),$$

那么，(35)式就对于所有 $k \geqslant 1$ 都正确了. 这样，我们就在(8)式定义下证明了(10)式.

由(9)式容易看出:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k} = \prod_{l=1}^{k} F_1(l)\boldsymbol{\mu}_0 + \sum_{i=1}^{k-1}\left(\prod_{l=i+1}^{k} F_1(l)\right)F_2(i)\boldsymbol{z}_i + F_2(k)\boldsymbol{z}_k. \tag{37}$$

将此式与线性估计量的一般表示式

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k} = \mathbf{c}_k + \sum_{i=1}^{k} a_{k,i}\boldsymbol{z}_i \tag{38}$$

对照，便可得到:

$$\mathbf{c}_k = \prod_{l=1}^{k} F_1(l)\boldsymbol{\mu}_0, \quad \forall k \geqslant 1; \tag{39}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{k,i} &= \left(\prod_{l=i+1}^{k} F_1(l)\right)F_2(i), \\ i &= 1, 2, \cdots, k-1 \\ a_{k,k} &= F_2(k) \end{aligned}\right\} \quad \forall k \geqslant 1. \tag{40}$$

由正交条件的第 k 个方程 $$E(\boldsymbol{x}_k-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k})\boldsymbol{z}_k^T=0 \tag{41}$$
出发，利用(1)、(2)、(10)与(11)诸式并考虑到 $E(\gamma_k)=E(\gamma_k^2)=\Pr(\gamma_k=1)$，可以得到
$$\begin{aligned}&\Pr(\gamma_k=1)S(k)H_k^T-F_2(k)\Pr(\gamma_k=1)H_kS(k)H_k^T-F_2(k)R_k\\&-[I-\pi(k)F_2(k)H_k]\Phi_{k,k-1}E(\gamma_k\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1|k-1}\boldsymbol{x}_k^T)H_k=0.\end{aligned} \tag{42}$$
由(38)式可得
$$E(\gamma_k\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1|k-1}\boldsymbol{x}_k^T)=\pi(k)E(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1|k-1}\boldsymbol{x}_k^T)+(\Pr(\gamma_k=1)-\pi(k))\boldsymbol{c}_{k-1}\boldsymbol{\mu}_0^T\Phi_{k0}^T. \tag{43}$$
将(43)式代入(42)式，再利用关系式
$$\Phi_{k,k-1}E(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1|k-1}\boldsymbol{x}_k^T)=S(k)-V_{\tilde{x}}(k|k-1), \tag{44}$$
就可得到 $F_2(k)$ 的表示式(11)式.

另一方面，若规定 $\boldsymbol{c}_0\triangleq\boldsymbol{\mu}_0$，则由(39)式立即便可导出递推公式(15)式.

(12)—(14)诸式可按文献[1]中相应公式的推导得出.

这样，我们就导出了关于 $\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}$ 的递推公式组(9)—(15)式.

在得到了关于 $\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}$ 的递推公式组以后，只要利用关系式
$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1|k}=\Phi_{k+1,k}\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}, \tag{45}$$
就很容易导出关于 $\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1|k}$ 的递推公式组(23)—(28)式.

五、结 论

在递推线性最优估计量存在的情况下，我们导出了在不确定观测下递推线性最优滤波器与一步预报器的一种递推公式. 这些递推公式是在以确定的方式利用初态 $\boldsymbol{x}_0$ 所提供的信息（均值 $\boldsymbol{\mu}_0$）的前提下，进一步利用不确定观测 $\{\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_k\}$ 对态变量 $\boldsymbol{x}_k$（或 $\boldsymbol{x}_{k+1}$）所作的最优估计. 与本文所得到的这些公式不同，文献[1]所得到的递推公式是利用不确定观测 $\{\boldsymbol{z}_0, \boldsymbol{z}_1, \cdots, \boldsymbol{z}_k\}$ 对 $\boldsymbol{x}_k$ 所作的最优估计，因为 $\boldsymbol{z}_0=\gamma_0H_0\boldsymbol{x}_0+v_0$，因此它对于初值 $\boldsymbol{x}_0$ 所提供的信息也是以不确定的方式加以利用的.

(35),(36),(42),(43)式的具体推导可见文献[2]. 文献[2]中还对一个具体例子给出了利用递推公式(9)—(15)式在计算机上得出的滤波器均方误差的理论值与模拟值.

参 考 文 献

[1] M. T. Hadidi and S. C. Schwartz, IEEE Trans. on AC, **AC-24** (1979), 944.
[2] 王兴德，在不确定观测下离散时间线性系统的递推最优态估计理论（硕士论文），中国科学院电子学研究所，1981年5月.

RECURSIVE ALGORITHMS FOR LINEAR LMSE ESTIMATORS UNDER UNCERTAIN OBSERVATIONS

Wang Xing-de
(Institute of Electronics, Academia Sinica)

In this paper, for linear discrete-time systems under uncertain observations, the recursive formulas for linear least mean-square error (LMSE) filter and one-step predictor is derived, when they exist.