第7卷 第2期　　电子科学学刊　　Vol. 7, No. 2
1985年3月　　JOURNAL OF ELECTRONICS　　Mar., 1985

有源网络不定导纳矩阵的一般 k 阶余因式的拓扑表达式*

黄汝激
(北京钢铁学院自动化系)

提　　要

本文提出并证明了有源网络不定导纳矩阵的一般 k 阶余因式的两个拓扑表达式 (A) 和 (B). 表达式 (A) 是 W. K. Chen 于1965年给出的一、二、三阶和特殊 k 阶余因式的拓扑表达式的统一和推广. 表达式 (B) 表明,存在另一个有源网络拓扑分析方法——正根有向 k-树法.

一、引　　言

网络的拓扑分析法是确定其符号网络函数的重要方法. 近三十年来,很多网络理论学者先后提出了许多种有源网络拓扑分析法, 其中公认为最好的是 W. K. Chen (陈惠开)于1965年提出的伴随有向图法(负根有向 k-树法)[1-3]. 他提出了有源网络不定导纳矩阵 $\boldsymbol{Y}$ 的伴随有向图 G_d 的概念,并应用它导出了 $\boldsymbol{Y}$ 的一、二、三阶余因式的拓扑表达式

$$\boldsymbol{Y}_{(i_1j_1)}=\sum T_{i_1}(y)=\sum T_r(y), \tag{1-1}$$

$$\boldsymbol{Y}_{(i_1j_1,i_2j_2)}=\sum T_{i_1j_1,i_2j_2}(y)-\sum T_{i_1j_2,i_2j_1}(y), \tag{1-2}$$

$$\boldsymbol{Y}_{(i_1j_1,i_2i_2,i_3i_3)}=\sum T_{i_1j_1,i_2,i_3}(y). \tag{1-3}$$

但是, W. K. Chen 的推导比较复杂, 1966年3月 A. Talbot[4] 提出了上述表达式的简化推导方法. 1966年12月 W. K. Chen[5] 又提出了 $\boldsymbol{Y}$ 的特殊 k 阶余因式的拓扑表达式

$$(-1)^{i_1+j_1}\det \boldsymbol{Y}_{i_1j_1,i_2i_2,\cdots,i_ki_k}=\sum T_{i_1j_1,i_2,\cdots,i_k}(y),$$

$$(i_1, j_1 < i_2,\cdots, i_k \text{ 或 } i_1, j_1 > i_2,\cdots,i_k, k>2); \tag{1-4}$$

式中, $\boldsymbol{Y}_{i_1j_1,i_2i_2,\cdots,i_ki_k}$ 是从 $\boldsymbol{Y}$ 中删去第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行和第 $j_1, i_2, \cdots, i_k$ 列得到的子阵, $T_{i_1j_1,i_2,\cdots,i_k}(y)$ 是 G_d 中以 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 为负根且 j_1 和 i_1 在一片中的有向 k-树的树支导纳积.

过去学者都是逐个地推导各个特殊余因式的拓扑表达式的,未见统一的推导方法. 本文的目的是填补这个空白,提出并证明有源网络不定导纳矩阵 $\boldsymbol{Y}$ 的一般 k-阶余因式的两个拓扑表达式 (A) 和 (B). 式 (A) 是式 (1-1)—(1-4) 的统一和推广. 式 (B) 表明存在另一个有源网络拓扑分析法——正根有向 k-树法.

* 1983年5月3日收到.

二. 预备知识

下面介绍本文要用到的有关矩阵和行列式的若干定义和符号:

定义1 自然数集 S_n 及其子集 $S_{\{i\}}$ 前 n 个自然数的集合称为自然数集 S_n，即 $S_n \triangleq \{1,2,\cdots,n\}$. 从 S_n 中任取 p 个元素 $i_1,i_2,\cdots,i_p$ 组成的子集称为 S_n 的 p 元子集，记作 $S_{\{i\}} \triangleq \{i_1,i_2,\cdots,i_p\}$. S_n 中共有 C_n^p 个 p 元子集，它们组成 S_n 中的 p 元子集族，记作 $C(S_n, p)$.

定义2 p 元排列及其标准排列 从 S_n 中取出 p 个元素 $i_1,i_2,\cdots,i_p$ 构成的排列 $i \triangleq i_1i_2\cdots i_p$ 称为 S_n 的一个 p 元排列或 $S_{\{i\}}$ 的一个全排列. 把 i 中 p 个元素改成按由小到大的顺序排列，称为 i 的对应标准排列，记作 $\alpha \triangleq \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p, \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_p, S_{\{\alpha\}} = S_{\{i\}}$. $S_{\{i\}}$ 的全排列共有 $p!$ 个，它们组成 p-元排列集，记作 $P_i = P(S_{\{i\}}, p) = P(\{i_1, i_2, \cdots, i_p\}, p)$.

定义3 补集与补排列 S_n 与其子集 $S_{\{i\}}$ 之差称为 $S_{\{i\}}$ 在 S_n 中的补集，记作

$$\bar{S}_{\{i\}} \triangleq S_n - S_{\{i\}} = \{i'_1, i'_2, \cdots, i'_{n-p}\}, \qquad S_{\{i\}} \subset S_n.$$

若 $S_{\{i\}}$ 的标准排列为 α，则 $\bar{S}_{\{i\}}$ 的标准排列称为 α 的补标准排列，记作 $\bar{\alpha} = \alpha'_1\alpha'_2\cdots\alpha'_{n-p}$.

定义4 排列减法 若集 $S \supset S'$，则 S 的一个全排列 p 与 S' 的一个全排列 p' 之差 $p - p'$ 是指从 p 中去掉 p' 的元素所得的排列. 特别是，若 $p_n \triangleq 1\ 2\cdots n$，则 $p_n - \alpha = \bar{\alpha}$.

定义5 子阵 $\boldsymbol{A}_{ij}$ $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ 中第 $i_1, i_2, \cdots, i_p$ 行和第 $j_1, j_2, \cdots, j_q$ 列上的元素按照排列 $i = i_1i_2\cdots i_p$ 和 $j = j_1j_2\cdots j_q$ 的顺序组成的矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的 $p \times q$ 子阵，记作

$$\boldsymbol{A}_{ij} = \boldsymbol{A}(i, j) \triangleq \begin{bmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_q} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_pj_1} & a_{i_pj_2} & \cdots & a_{i_pj_q} \end{bmatrix} = [a_{i_rj_s}]_{p\times q}. \tag{2}$$

若 $S_{\{j\}} = S_n$，且 $j = p_n$，则 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 简记作 $\boldsymbol{A}_{i,}$ 或 $\boldsymbol{A}(i,)$. 若 $S_{\{i\}} = S_m$，且 $i = p_m$，则 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 简记作 $\boldsymbol{A}_{,j}$ 或 $\boldsymbol{A}(,j)$.

定义6 余子阵 $\boldsymbol{A}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的 $(m-p)\times(n-q)$ 子阵 $\boldsymbol{A}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 中 $p \times q$ 子阵 $\boldsymbol{A}_{\alpha\beta}$ 的余子阵，它是从 $\boldsymbol{A}$ 中去掉标准排列 α 和 β 所对应的那些行和列之后所余下的子阵. 特别是，$\boldsymbol{A}$ 中元素 a_{ij} 的余子阵记作 $\boldsymbol{A}_{\bar{i}\bar{j}}$.

定义7 子式 $|\boldsymbol{A}_{\alpha\beta}|$ 及其余子式 $|\boldsymbol{A}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}|$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中任一 k 阶子方阵 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 的行列式称为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式，记作 $|\boldsymbol{A}_{ij}|$ 或 $\det \boldsymbol{A}_{ij}$. 根据行列式理论[6,7]有

$$|\boldsymbol{A}_{ij}| = \det \boldsymbol{A}_{ij} = e_{\binom{i}{\alpha}} e_{\binom{j}{\beta}} |\boldsymbol{A}_{\alpha\beta}|, \tag{3}$$

式中，$e_{\binom{i}{\alpha}}$ 和 $e_{\binom{j}{\beta}}$ 分别为从排列 i, j 到对应标准排列 α, β 的置换 $\begin{pmatrix} i \\ \alpha \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} j \\ \beta \end{pmatrix}$ 的奇偶指标.

k 阶子方阵 $\boldsymbol{A}_{\alpha\beta}$ 的余子方阵 $\boldsymbol{A}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}|$ 称为 k 阶子式 $|\boldsymbol{A}_{\alpha\beta}|$ 的余子式.

定义 8 k 阶余因式 $A_{(\alpha\beta)}$ 若 k 元排列 $i = i_1i_2\cdots i_k$ 和 $j = j_1j_2\cdots j_k$ 的对应标准排列各为 $\alpha = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k$ 和 $\beta = \beta_1\beta_2\cdots\beta_k$，则称

$$A_{(ij)} = A_{(i_1j_1,i_2j_2,\cdots,i_kj_k)} \triangleq e_{\binom{i}{\alpha}} e_{\binom{j}{\beta}} (-1)^{\sum_{l=1}^{k}(i_l+j_l)} |\boldsymbol{A}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}| \tag{4-1}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 中子式 $|\boldsymbol{A}_{ij}|$ 的 k 阶代数余子式或 k 阶余因式. 特别是，子式 $|\boldsymbol{A}_{\alpha\beta}|$ 的余因式为

$$\boldsymbol{A}_{(\alpha\beta)} \triangleq (-1)^{\sum_{l=1}^{k}(\alpha_l+\beta_l)} |\boldsymbol{A}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}|，\alpha, \beta \text{ 为标准排列.} \tag{4-2}$$

根据式 (4-1)—(4-2)，行列式的拉普拉斯展开定理可以写成

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{S_{\{\beta\}}\in C(S_n,k)} |\boldsymbol{A}_{\alpha\beta}| A_{(\alpha\beta)} = \sum_{S_{\{\alpha\}}\in C(S_n,k)} |\boldsymbol{A}_{\alpha\beta}| A_{(\alpha\beta)} \tag{5-1}$$

$$= \sum_{S_{\{j\}}\in C(S_n,k)} |\boldsymbol{A}_{ij}| A_{(ij)} = \sum_{S_{\{i\}}\in C(S_n,k)} |\boldsymbol{A}_{ij}| A_{(ij)}, \tag{5-2}$$

式中，$S_{\{i\}} = S_{\{\alpha\}}$ 和$S_{\{j\}} = S_{\{\beta\}}$ 分别是排列 i（或 α）和 j（或 β）中 k 个元素组成的 k 元子集.

式 (4-2) 和 (5-1) 是通常有关行列式论的书刊[7]中所采用的. 式 (4-1)是式 (4-2) 的推广，式 (5-2) 是式 (5-1) 的推广，它们是本文为了网络拓扑分析的需要而首次引入的. 其他术语的代表符号在文献 [6, 7] 中有些混乱，这里把它们系统化了.

三、一般 k 阶余因式的拓扑表达式

定义 9 出、入关联矩阵 $\boldsymbol{A}^+$ 和$\boldsymbol{A}^-$ 具有 n 节点、b 边的有向图 G_d 的出、入关联矩阵 $\boldsymbol{A}^+$ 和$\boldsymbol{A}^-$ 定义为

$\boldsymbol{A}^+ \triangleq [a_{ip}^+]_{n\times b}$；若边 p 与点 i 相接而且离开点 i，则 $a_{ip}^+ = 1$；否则，$a_{ip}^+ = 0$；

$\boldsymbol{A}^- \triangleq [a_{ip}^-]_{n\times b}$；若边 p 与点 i 相接而且指向点 i，则 $a_{ip}^- = -1$；否则，$a_{ip}^- = 0$.

显然，$\boldsymbol{A}^+(\boldsymbol{A}^-)$ 的每一列至多含一个 $1(-1)$，其余元素为 0；而且 G_d 的全关联矩阵 $\boldsymbol{A} = [a_{ip}]_{n\times b}$ 与 $\boldsymbol{A}^+$、$\boldsymbol{A}^-$ 之间有如下关系：

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^+ + \boldsymbol{A}^-. \tag{6}$$

引理 1 设有源网络N的不定导纳矩阵 $\boldsymbol{Y}$ 的伴随有向图 $G_d = G_d(V, E_d)$，点集 V 和边集 E_d 的基数分别为 $|V| = n$ 和 $|E_d| = b$，G_d 的全关联矩阵、出和入关联矩阵依次为 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{A}^+$ 和 $\boldsymbol{A}^-$，G_d 的边导纳对角阵为 $\boldsymbol{Y}_e$，则不定导纳矩阵 $\boldsymbol{Y}$ 及其子阵 $\boldsymbol{Y}_{\alpha\beta}$ 的余子阵 $\boldsymbol{Y}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ 分别可表示为

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{Y}_e\boldsymbol{A}^\tau = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_e(\boldsymbol{A}^-)^\tau, \tag{7-1}$$

$$\boldsymbol{Y}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \boldsymbol{A}^+_{\bar{\alpha}}, \boldsymbol{Y}_e(\boldsymbol{A}_{\bar{\beta}},)^\tau = \boldsymbol{A}_{\bar{\alpha}}, \boldsymbol{Y}_e(\boldsymbol{A}^-_{\bar{\beta}},)^\tau, \tag{7-2}$$

式中，$\bar{\alpha}$ 和 $\bar{\beta}$ 分别是 S_n 的 k 元标准排列 α 和 β 的对应补标准排列，右上标 τ 表示“转置”.

证 根据 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{A}^+$、$\boldsymbol{A}^-$、$\boldsymbol{Y}_e$ 的定义和 $\boldsymbol{Y}$ 的零和特性[3]，可推得

$$\left.\begin{aligned}(\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{Y}_c\boldsymbol{A}^{+\tau})_{ii} &= \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} y_{ik} = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} y_{ki} = (\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{Y}_c\boldsymbol{A}^{-\tau})_{ii},\\ (\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{Y}_c\boldsymbol{A}^{-\tau})_{ii} &= 0 = (\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{Y}_c\boldsymbol{A}^{+\tau})_{ii},\end{aligned}\right\} i=1,2,\cdots,n;$$

$$\left.\begin{aligned}(\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{Y}_c\boldsymbol{A}^{-\tau})_{ij} &= -y_{ij} = (\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{Y}_c\boldsymbol{A}^{+\tau})_{ji},\\ (\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{Y}_c\boldsymbol{A}^{+\tau})_{ij} &= 0 = (\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{Y}_c\boldsymbol{A}^{-\tau})_{ij},\end{aligned}\right\} i,j=1,2,\cdots,n,\ i\neq j;$$

式中,下标 ii 和 ij 表示矩阵的 (i,i) 元素和 (i,j) 元素. 从上列关系式可推得

$$(\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{Y}_c\boldsymbol{A}^{\tau})_{ii} = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} y_{ik} = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} y_{ki} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_c\boldsymbol{A}^{-\tau})_{ii},\quad i=1,2,\cdots,n;$$

$$(\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{Y}_c\boldsymbol{A}^{\tau})_{ij} = -y_{ij} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_c\boldsymbol{A}^{-\tau})_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots,n,\ i\neq j.$$

上二式合在一起,表明式 (7-1) 成立.

根据式 (7-1) 和矩阵乘法的定义,可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Y}_{\alpha\bar{\beta}} &= (\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{Y}_c\boldsymbol{A}^{\tau})_{\alpha\bar{\beta}} = \boldsymbol{A}^{+}_{\bar{\alpha}},\boldsymbol{Y}_c(\boldsymbol{A}^{\tau}),_{\bar{\beta}} = \boldsymbol{A}^{+}_{\bar{\alpha}},\boldsymbol{Y}_c(\boldsymbol{A}_{\bar{\beta}},)^{\tau}\\ &= (\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_c\boldsymbol{A}^{-\tau})_{\alpha\bar{\beta}} = \boldsymbol{A}_{\bar{\alpha}},\boldsymbol{Y}_c(\boldsymbol{A}^{-\tau}),_{\bar{\beta}} = \boldsymbol{A}_{\bar{\alpha}},\boldsymbol{Y}_c(\boldsymbol{A}_{\bar{\beta}},)^{\tau}.\end{aligned}$$

这证明了式 (7-2), 引理 1 证毕.

定义 10　p 边子图　从图 $G_d(V,E_d)$ 的边集 $E_d=\{e_1,e_2,\cdots,e_b\}$ 中取出 p 条边 $e_{v_1},e_{v_2},\cdots,e_{v_p}$ 组成的子边集, 记作 $E_{d(v)}=\{e_{v_1},e_{v_2},\cdots,e_{v_p}\}$, 它生成的子图 $G_{d(v)}\triangleq G(V,E_{d(\gamma)})$ 称为 G_d 的 p 边子图. 特别是,当 $p=n-k$ 时,称为 $n-k$ 边子图.

定义 11　正(负)根有向 k-树　有向图 G_d 的 $n-k$ 边子图 $G_{d(\gamma)}$ 称为以节点 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 为正(负)根的正(负)根有向 k-树,记作 $T_i^{\uparrow}\triangleq T_{i_1,i_2,\cdots,i_k}^{\uparrow\ \uparrow\ \ \ \uparrow}(T_i^{\downarrow}\triangleq T_{i_1,i_2,\cdots,i_k}^{\downarrow\ \downarrow\ \ \ \downarrow})$, 当且仅当它不含回路,而且根 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 的入(出)度为 0, 其余节点的入(出)度为 1.

G_d 中所有以 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 为正(负)根的有向 k-树 $T_i^{\uparrow}(T_i^{\downarrow})$ 的集合记作 $\{T_i^{\uparrow}\}$ $(\{T_i^{\downarrow}\})$. G_d 中 k 个节点 $j_1,j_2,\cdots,j_k$ 分离的 k-树记作 $T_j\triangleq T_{j_1,j_2,\cdots,j_k}$. G_d 中所有把 $j_1,j_2,\cdots,j_k$ 分离开的 k-树的集合记作 $\{T_j\}$.

定义 12　混合 k-树和有向混合 k-树　把有源网络 N 的伴随有向图 G_d 中每对方向相反而权相同的同端点有向边用一条具有同样权的无向边来代替,所得图称为 N 或 G_d 的伴随混合图 G. G_d 的 k-树和正(负)根有向 k-树在 G 中的映像称为 G 的混合 k-树和正(负)根有向混合 k-树. 显然, G_d 中的正(负)根有向 k-树一一对应于 G 中的正(负)根有向混合 k-树. 为了简单起见,二者将用同样的符号 $T_i^{\uparrow}(T_i^{\downarrow})$ 来表示. 有关 G_d 中的有向 k-树问题可以换成较简单的混合图 G 中的有向混合 k-树问题.

引理 2　设 $G_{d(\gamma)}$ 为有向图 G_d 中的一个 $n-k$ 边子图, $\bar{\alpha}$ 和 $\bar{\beta}$ 分别是 k 元排列 i 和 j 的对应标准排列 α 和 β 的补标准排列,则

〈1〉当 $G_{d(\gamma)}\in\{T_i^{\downarrow}\}$ 时, $\det \boldsymbol{A}^{+}(\bar{\alpha},\gamma)=\pm 1$;

〈2〉当 $G_{d(\gamma)}\in\{T_j^{\uparrow}\}$ 时, $\det \boldsymbol{A}^{-}(\bar{\beta},\gamma)=\pm 1$;

〈3〉当且仅当 $G_{d(\gamma)}\in\{T_j\}$ 时, $\det \boldsymbol{A}(\bar{\beta},\gamma)=\pm 1$;

〈4〉当且仅当 $G_{d(\gamma)}\in\{T_i\}$ 时, $\det \boldsymbol{A}(\bar{\alpha},\gamma)=\pm 1$;

$$\langle 5\rangle\ \det \boldsymbol{A}^{+}(\bar{\alpha},\ \gamma)\det \boldsymbol{A}(\bar{\beta},\ \gamma)=\begin{cases}\pm 1, & \text{当}\ G_{d(\gamma)}\in\{T_i^{\downarrow}\}\cap\{T_j\};\\ 0, & \text{当}\ G_{d(\gamma)}\notin\{T_i^{\downarrow}\}\cap\{T_j\};\end{cases}$$

$$\langle 6\rangle\ \det \boldsymbol{A}(\bar{\alpha},\ \gamma)\det \boldsymbol{A}^{-}(\bar{\beta},\ \gamma)=\begin{cases}\pm 1, & \text{当}\ G_{d(\gamma)}\in\{T_i\}\cap\{T_j^{\uparrow}\};\\ 0, & \text{当}\ G_{d(\gamma)}\notin\{T_i\}\cap\{T_j^{\uparrow}\};\end{cases}$$

式中，A、A^+ 和 A^- 分别为 G_d 的全、出和入关联矩阵.

证　先证 $\langle 1\rangle$：当 $G_{d(\gamma)}\in\{T_i^{\downarrow}\}$ 时，$\boldsymbol{A}^{+}(\bar{\alpha},\ \gamma)$ 每行恰有一个 1，而每列至多一个 1，从而每列也恰有一个 1，通过适当的列(或行)置换，可使它变成单位阵，因此 $\langle 1\rangle$ 成立.

其次证 $\langle 3\rangle$：当 $G_{d(\gamma)}\in\{T_j\}$ 时，$G_{d(\gamma)}$ 为 k-树，秩为 $n-k$，$\boldsymbol{A}(\bar{\beta},\ \gamma)$ 是 k 块对角阵，每一块是 $G_{d(\gamma)}$ 中一个子树的全关联矩阵但去掉一行，其行列式为 ± 1，因此 $\det \boldsymbol{A}(\bar{\beta},\ \gamma)=\pm 1$. 反之，若 $\det \boldsymbol{A}(\bar{\beta},\ \gamma)=\pm 1\neq 0$，则其 $n-k$ 列是线性无关的，从而 $G_{d(\gamma)}$ 不含回路，即为 k-树.

现在证 $\langle 5\rangle$：当 $G_{d(\gamma)}\in\{T_h^{\downarrow}\}$ $(h\neq i)$ 时，至少有一个 $h_t\neq i_l$ $(l=1,2,\cdots,k)$，由于负根 h_t 的出度为 0，$\boldsymbol{A}^{+}(\bar{\alpha},\ \gamma)$ 的行 h_t 全为 0，因此 $\det \boldsymbol{A}^{+}(\bar{\alpha},\ \gamma)=0$. 当 $G_{d(\gamma)}$ 是 k-树但不是有向 k-树时，至少有一点 i'_l 的出度 $d^{+}(i'_l)\geqslant 2$，它射出的 $d^{+}(i'_l)$ 条边在 $\boldsymbol{A}^{+}(\bar{\alpha},\gamma)$ 中对应的那些列是一样的，因此 $\det \boldsymbol{A}^{+}(\bar{\alpha},\gamma)=0$. 根据这两种情况和 $\langle 1\rangle$、$\langle 3\rangle$ 和 A 的么模特性可得表 1.

表 1　$\det A^{+}(\bar{\alpha},\gamma)$ 和 $\det A(\beta,\gamma)$ 与 $G_{d(\gamma)}$ 的关系

子图类型 / 行列式类型	$(n-k)$ 边子图 $G_{d(\gamma)}$					
	k-树					含回路
	有向 k-树		非有向 k-树			
	$\in\{T_i^{\downarrow}\}$	$\notin\{T_i^{\downarrow}\}$		$\in\{T_j\}$	$\notin\{T_j\}$	
$\det\boldsymbol{A}^{+}(\bar{\alpha},\ \gamma)$	± 1	0	0			0或± 1
$\det\boldsymbol{A}(\bar{\beta},\ \gamma)$				± 1	0	0

从表 1 即可推得 $\langle 5\rangle$ 成立. 类似地，可证明 $\langle 2\rangle$、$\langle 4\rangle$ 和 $\langle 6\rangle$ 成立.

引理 3　若 $G_{d(\gamma)}=T_i^{\downarrow}(T_i^{\uparrow})$ 为有向图 G_d 中以 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 为负(正)根的一棵有向 k-树，$\bar{\alpha}$ 是排列 $i=i_1i_2\cdots i_k$ 的对应标准排列 α 的补标准排列，则

$$\det \boldsymbol{A}^{+}(\bar{\alpha},\ \gamma)=\det \boldsymbol{A}(\bar{\alpha},\ \gamma),\qquad (\det \boldsymbol{A}^{-}(\bar{\alpha},\ \gamma)=\det \boldsymbol{A}(\bar{\alpha},\ \gamma)).\tag{8}$$

证　若 $T_i^{\downarrow}$ 是星形的负根有向 k-树（即负根的出度为 0，其余各点的出度为 1、入度为 0 的 k-树），则 $\boldsymbol{A}^{-}(\bar{\alpha},\ \gamma)=0$，$\boldsymbol{A}^{+}(\bar{\alpha},\ \gamma)=\boldsymbol{A}(\bar{\alpha},\ \gamma)$. 若 $T_i^{\downarrow}$ 是非星形的负根有向 k-树，把其中每条有向路径的第 1 边以外各边所对应的列都加到第 1 边的对应列上，可使 $\boldsymbol{A}(\bar{\alpha},\ \gamma)$ 变换成 $\boldsymbol{A}^{+}(\bar{\alpha},\ \gamma)$，由此推得 $\det \boldsymbol{A}^{+}(\bar{\alpha},\ \gamma)=\det \boldsymbol{A}(\bar{\alpha},\ \gamma)$. 类似地可证，对于正根有向 k-树 $T_i^{\uparrow}$，有 $\det \boldsymbol{A}^{-}(\bar{\alpha},\ \gamma)=\det \boldsymbol{A}(\bar{\alpha},\ \gamma)$.

引理 4　设 $n-k$ 边子图 $G_{d(\gamma)}=T_{i_1i'_1,i_2i'_2,\cdots,i_ki'_k}$ 为 n 节点有向图 G_d 的一棵 k-树，$\alpha=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k$ 和 $\beta=\beta_1\beta_2\cdots\beta_k$ 是排列 $i=i_1i_2\cdots i_k$ 和 $j=j_1j_2\cdots j_k$ 的对应标准排列，$p_n=12\cdots n$，$\bar{\alpha}=p_n-\alpha$，$\bar{\beta}=p_n-\beta$，$j'=j'_1j'_2\cdots j'_k\in P(S_{\{j\}},k)$，$\gamma=\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{n-k}$，$\boldsymbol{A}$ 是 G_d 的全关联矩阵，则

$$e_{\binom{i}{\alpha}}e_{\binom{j}{\beta}}(-1)^{\sum_{l=1}^{k}(i_l+j_l)}e_{\binom{j}{j'}}\det \boldsymbol{A}(\bar{\alpha},\gamma)=\det \boldsymbol{A}(\bar{\beta},\gamma). \tag{9}$$

证 设 $i_l \neq j_l'$，$l=1,2,\cdots,k$，我们将证明，通过适当的逐步行初等变换，可把 $\det \boldsymbol{A}(\bar{\alpha},\gamma)$ 变换成 $\det \boldsymbol{A}(\bar{\beta},\gamma)$.

(1) 置换标准排列 p_n，使得 α、β 以外的元素不动，数 α_l 置换到 α_l^* 位上，β_l 置换到 β_l^* 位上，而且 $\alpha_1^*<\alpha_2^*\cdots<\alpha_k^*<\beta_1^*<\beta_2^*<\cdots<\beta_k^*$，所得新排列记作 p_n^*. 一般情况下，p_n^* 是非标准排列. 根据排列论[6]，p_n^* 的奇偶指标 $e_{p_n^*}=e_{\alpha\beta}$. 把 α_l 置换到 α_l^* 位上要经过 $\alpha_l-\alpha_l^*$ 次相邻对换，因此 α 在 p_n^* 中产生的奇偶指标为 $(-1)^{\sum_{l=1}^{k}(\alpha_l-\alpha_l^*)}$，从而排列 $p_n^*-\alpha$ 的奇偶指标为

$$e_{(p_n^*-\alpha)}=e_{\alpha\beta}(-1)^{\sum_{l=1}^{k}(\alpha_l-\alpha_l^*)}. \tag{10-1}$$

同理有

$$e_{(p_n^*-\beta)}=e_{\alpha\beta}(-1)^{\sum_{l=1}^{k}(\beta_l^*-\beta_l)}. \tag{10-2}$$

由于 $\sum_{l=1}^{k}(\alpha_l+\beta_l)=\sum_{l=1}^{k}(\alpha_l^*+\beta_l^*)$，可推得

$$e_{(p_n^*-\alpha)}=e_{(p_n^*-\beta)}. \tag{10-3}$$

把 $\det \boldsymbol{A}(p_n-\alpha,\gamma)$ 变换成 $\det \boldsymbol{A}(p_n^*-\alpha,\gamma)$，应乘上 $e_{(p_n^*-\alpha)}$，即

$$e_{(p_n^*-\alpha)}\det \mathbf{A}(\bar{\alpha},\gamma)=\det \boldsymbol{A}(p_n^*-\alpha,\gamma). \tag{10-4}$$

(2) 在排列 $p_n^*-\alpha$ 中把 β 置换成 j'，即把原 j_l' 行置换到 β_l^* 行位上，行列式应乘上 j' 的奇偶指标 $e_{j'}=e_{\binom{j}{\beta}}e_{\binom{j}{j'}}$；所得行排列记作 $p_n^{**}-\alpha$，这里 p_n^{**} 是从 p_n^* 中把 β 置换成 j' 而得到的新排列.

(3) 设 k-树 $T_{i_1j_1',i_2j_2',\cdots,i_kj_k'}$ 中第 l 子树的点集为 $V_l=\{i_l,j_l';h_{l1},\cdots,h_{lt_l}\}$，$l=1,2,\cdots k$，则在 $\boldsymbol{A}(\cdot\gamma)$ 中对应于 V_l 的那些行之和为 0. 因此在 $\det \boldsymbol{A}(p_n^{**}-\alpha,\gamma)$ 中把行 $h_{l1},\cdots,h_{lt_l}$ 加到行 j_l' 上后，乘上 (-1)，可使原 j_l' 行元素变成 i_l 行元素，但位置仍在 β_l^* 行位上，把它置换到 α_l^* 行位上，需经 $\beta_l^*-(\alpha_l^*+1)-(k-l)-(l-1)=\beta_l^*-\alpha_l^*-k$ 次邻对换[式中考虑到行位 β_l^* 与 (α_l^*+1) 之间缺少了 $k-l$ 个行位 $\alpha_{l+1}^*,\cdots,\alpha_k^*$ 和 $l-1$ 个行位 $\beta_1^*,\cdots,\beta_{l-1}^*$，前者原来就缺位，后者已被移到 α_l^*+1 行位之前了]，行列式应乘上 $(-1)^{\beta_l^*-\alpha_l^*-k}=(-1)^{\beta_l^*+\alpha_l^*+k}$. 使所有 j_l' 行 $(l=1,2,\cdots,k)$ 变成 i_l 行，并移到 α_l^* 行位上，行列式共应乘上

$$(-1)^{k+\sum_{l=1}^{k}(\beta_l^*+\alpha_l^*+k)}=(-1)^{k(k+1)+\sum_{l=1}^{k}(\alpha_l+\beta_l)}=(-1)^{\sum_{l=1}^{k}(i_l+j_l)}.$$

(4) 把 i 置换成 α，应乘上 $e_{\binom{i}{\alpha}}$，所得行排列为 p_n^*-β.

(5) 恢复 p_n^* 成 p_n，应乘上 $e_{(p_n^*-\beta)}$，结果得到 $\det \boldsymbol{A}(\bar{\beta},\gamma)$.

综合上述行变换，考虑到式(10-3)，可推得式(9).

若有某些 $i_l = j'_l = j_h$，则它们在步骤(1)中应保持不动，只置换 α、β 中的其余元素，仍可推得式(9).

应用引理 1—4 可推得下面的一般定理：

定理　(不定导纳矩阵之 k 阶余因式的拓扑表达式)　设有源网络 N 的不定导纳矩阵为 $\boldsymbol{Y}$，$\boldsymbol{Y}$ 的伴随混合图为 $G = G(V, E)$，$|V| = n$，集 $S_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ 的两个 k 元排列 $i = i_1i_2\cdots i_k$ 和 $j = j_1j_2\cdots j_k$ 的对应标准排列分别为 $\alpha = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k$ 和 $\beta = \beta_1\beta_2\cdots\beta_k$，$p_n = 1\ 2\cdots n$，$\bar{\alpha} = p_n - \alpha$，$\bar{\beta} = p_n - \beta$，则 $\boldsymbol{Y}$ 中 k 阶子式 $|\boldsymbol{Y}_{ij}|$ 的 k 阶余因式

$$\boldsymbol{Y}_{(ij)} \equiv \boldsymbol{Y}_{(i_1j_1, i_2j_2, \cdots, i_kj_k)} \triangleq e_{\binom{i}{\alpha}} e_{\binom{j}{\beta}} (-1)^{\sum_{l=1}^{k}(i_l+j_l)} |\boldsymbol{Y}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}| \tag{11}$$

的拓扑表达式为

$$\mathrm{Y}_{(i_1j_1, i_2j_2, \cdots, i_kj_k)} = \sum_{j'_1\cdots j'_k \in P(\{j_1, \cdots, j_k\}, k)} e_{\binom{j_1\cdots j_k}{j'_1\cdots j'_k}} \sum_l T^{(l)}_{\underset{i_1j'_1}{\downarrow}, \underset{i_2j'_2}{\downarrow}, \cdots, \underset{i_kj'_k}{\downarrow}}(y) \tag{A}$$

$$= \sum_{i'_1\cdots i'_k \in P(\{i_1, \cdots, i_k\}, k)} e_{\binom{i_1\cdots i_k}{i'_1\cdots i'_k}} \sum_m T^{(m)}_{\underset{i'_1j_1}{\uparrow}, \underset{i'_2j_2}{\uparrow}, \cdots, \underset{i'_kj_k}{\uparrow}}(y) \tag{B}$$

或简写成

$$\boldsymbol{Y}_{(ij)} = \sum_{j' \in P_j} e_{\binom{j}{j'}} \sum_l T^{(l)}_{\underset{ij'}{\downarrow}}(y) = \sum_{j' \in P_j} e_{\binom{j}{j'}} U_{\underset{ij'}{\downarrow}}(y) \tag{A'}$$

$$= \sum_{i' \in P_i} e_{\binom{i}{i'}} \sum_m T^{(m)}_{\underset{i'j}{\uparrow}}(y) = \sum_{i' \in P_i} e_{\binom{i}{i'}} U_{\underset{i'j}{\uparrow}}(y). \tag{B'}$$

这里求和是分别对所有排列 $j' \in P_j$ 和 $i' \in P_i$ 进行的. 若其中某些类型的有向 k-树不存在，则对应的树支导纳积为零. 式中，

$P_x \triangleq P(\{x_1, \cdots, x_k\}, k)$，$x = i, j$——$k$ 个自然数 $x_1, \cdots, x_k$ 的全排列集合；

$e_{\binom{x}{x'}} \triangleq e_{\binom{x_1\cdots x_k}{x'_1\cdots x'_k}} = (-1)^{k - S\binom{x}{x'}}$，$x = i, j$——置换$\binom{x}{x'}$的奇偶指标，其中 $S\binom{x}{x'}$ 是$\binom{x}{x'}$的所有独立循环置换数[8]；

$T^{(l)}_{\underset{ij'}{\downarrow}}(y)$——$G$ 中第 l 个以 $i_1, \cdots, i_k$ 为负根而且点对 $(i_1, j'_1), \cdots, (i_k, j'_k)$ 各在一个片中的负根有向混合 k-树的树支导纳积；

$T^{(m)}_{\underset{i'j}{\uparrow}}(y)$——$G$ 中第 m 个以 $j_1, \cdots, j_k$ 为正根而且点对 $(i'_1, j_1), \cdots, (i'_k, j_k)$ 各在一个片中的正根有向混合 k-树的树支导纳积；

$U_{\underset{ij'}{\downarrow}}(y) = \sum_l T^{(l)}_{\underset{ij'}{\downarrow}}(y)$——$G$ 中所有 $T_{\underset{ij'}{\downarrow}}$ 型负根 k-树的树支导纳积之和；

$U_{\underset{i'j}{\uparrow}}(y) = \sum_m T^{(m)}_{\underset{i'j}{\uparrow}}(y)$——$G$ 中所有 $T_{\underset{i'j}{\uparrow}}$ 型正根 k-树的树支导纳积之和.

证　应用引理 1—4 和 Binet-Cauchy 定理[2,7]，考虑到 $\boldsymbol{Y}_e$ 为对角阵，可推得

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{Y}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}| &= \det[\boldsymbol{A}^{\pm}_{\bar{\alpha}}, \boldsymbol{Y}_e(\boldsymbol{A}_{\bar{\beta}},)^{\tau}] \\ &= \sum_{\gamma} \sum_{\delta} \det \boldsymbol{A}^{+}(\bar{\alpha}, \gamma) \det \boldsymbol{Y}_e(\gamma, \delta) \det \boldsymbol{A}^{\tau}(\delta, \bar{\beta}) \end{aligned}$$

$$= \sum_{\gamma} \det \boldsymbol{A}^{+}(\bar{\alpha}, \gamma) \det \boldsymbol{Y}_{e}(\gamma, \gamma) \det \boldsymbol{A}(\bar{\beta}, \gamma)$$

$$= \sum_{G_{(\gamma)} \in \{T_{i}^{\downarrow}\} \cap \{T_{j}\}} \det \boldsymbol{A}^{+}(\bar{\alpha}, \gamma) \det \boldsymbol{A}(\bar{\beta}, \gamma) G_{(\gamma)}(y)$$

$$= \sum_{G_{(\gamma)} \in \{T_{i}^{\downarrow}\} \cap \{T_{j}\}} \det \boldsymbol{A}(\bar{\alpha}, \gamma) \det \boldsymbol{A}(\bar{\beta}, \gamma) G_{(\gamma)}(y)$$

$$= e_{\binom{i}{\alpha}} e_{\binom{j}{\beta}} (-1)^{\sum_{l=1}^{k} (i_l + j_l)} \sum_{j' \in P_j} e_{\binom{j}{j'}} \sum_{l} T_{\underset{ij'}{\downarrow}}^{(l)}(y), \tag{12}$$

式中，$G_{(\gamma)}(y)$ 表示 $n-k$ 边子图 $G_{(\gamma)}$ 的边导纳积；γ 和 δ 是 S_n 的任意两个 $n-k$ 元标准排列；求和是对所有可能的 γ 和 δ 进行的；最后一行是根据引理 4、引理 2 和集合关系式

$$\{G_{(\gamma)}\} = \{T_{i}^{\downarrow}\} \cap \{T_{j}\} = \bigcup_{j' \in P_j} \bigcup_{l} \{T_{\underset{ij'}{\downarrow}}^{(l)}\} \equiv \bigcup_{j', l} \{T_{\underset{ij'}{\downarrow}}^{(l)}\}. \tag{13}$$

把式(12)代入式(11)，即可推得式 (A). 类似地，可证明式 (B).

应用下面的一一对应关系，可以方便地求得所有要求的正、负根有向混合 k-树：

$$\bigcup_{j', l} \{T_{\underset{ij'}{\downarrow}}^{(l)}\} = \{T_{\underset{i}{\downarrow}}\} \cap \{T_{j}\} \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \{T_{\underset{\textcircled{i}}{\downarrow}}\} \cap \{T_{\textcircled{j}}\}, \tag{14-1}$$

$$\bigcup_{i', m} \{T_{\underset{i'j}{\uparrow}}^{(m)}\} = \{T_{i}\} \cap \{T_{\underset{j}{\uparrow}}\} \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \{T_{\textcircled{i}}\} \cap \{T_{\underset{\textcircled{j}}{\uparrow}}\}, \tag{14-2}$$

式中，$T_{\textcircled{i}}$ 和 $T_{\textcircled{i}}^{\downarrow}$ 分别是把 G 中 $i_1, \cdots, i_k$ 缩成一点ⓘ所得图 $G_{\textcircled{i}}$ 的混合树和以ⓘ为负根的有向混合树，$T_{\textcircled{j}}$ 和 $T_{\textcircled{j}}^{\uparrow}$ 分别是把 G 中 $j_1, \cdots, j_k$ 缩成一点ⓙ所得图 $G_{\textcircled{j}}$ 的混合树和以ⓙ为正根的有向混合树.

公式 (A) 是式(1-1)—(1-4)(引自 W. K. Chen) 的统一和推广. 事实上，在式 (A) 中令 $k=1$，考虑到 $\boldsymbol{Y}$ 的等(一阶)余因式特性，即可导出式(1-1)；令 $k=2$，即得式(1-2)；令 $k=3$，$j_2=i_2$，$j_3=i_3$，即得式(1-3)；令 $j_l=i_l$ $(l=2, \cdots, k)$，即得式(1-4).

定理的应用

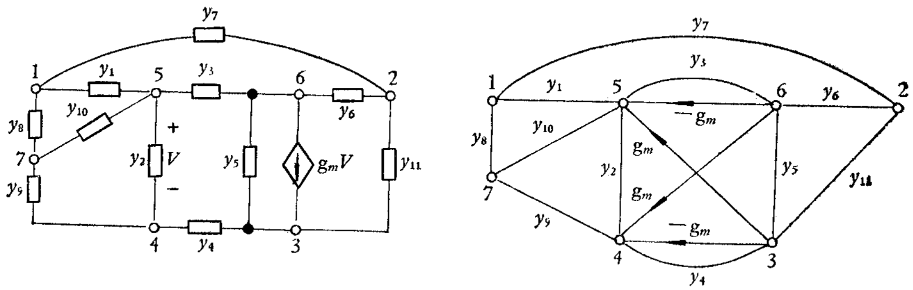
〈1〉统一并简化了 W. K. Chen 的负根有向 k-树法理论，避免逐个地推导各个特殊余因式的拓扑表达式；提供了网络分析的正根有向 k-树法.

〈2〉为数学上任何具有行、列零和特性的矩阵——等余因式矩阵的符号 k 阶余因式的计算提供了两个拓扑方法——正、负根有向 k-树法. 对于非等余因式矩阵，可预先添上适当的一行和一列，使其变成等余因式矩阵.

定理在其他方面(如大网络分析)的应用有待于进一步探讨. 公式 (A) 和 (B) 中可能出现对消的冗余项，若采用完全有向 k-树，可能消除冗余项，这个问题将在另一篇论文中探讨.

四、应 用 举 例

[例] 有一有源网络 N 如图 1(a)，它的伴随混合图 G 如图 1(b). 要求用行列式展开法和正、负根有向 k-树法这三种方法来求 N 的不定导纳阵 $\boldsymbol{Y}$ 的三阶余因式 $y_{(12,56,47)}$.



(a) 有源网络 N　　　(b) N 的伴随混合图 G

图 1　有源网络 N 及其伴随混合图 G

解　从图 1(a) 可写出 N 的不定导纳矩阵 $\boldsymbol{Y}$ 如下:

$$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix} y_1+y_7+y_8 & -y_7 & 0 & 0 & -y_1 & 0 & -y_8 \\ -y_7 & y_6+y_7+y_{11} & -y_{11} & 0 & 0 & -y_6 & 0 \\ 0 & -y_{11} & y_4+y_5+y_{11} & g_m-y_4 & -g_m & -y_5 & 0 \\ 0 & 0 & -y_4 & y_2+y_4+y_9 & -y_2 & 0 & -y_9 \\ -y_1 & 0 & 0 & -y_2 & y_1+y_2+y_3+y_{10} & -y_3 & -y_{10} \\ 0 & -y_6 & -y_5 & -g_m & g_m-y_3 & y_3+y_5+y_6 & 0 \\ -y_8 & 0 & 0 & -y_9 & -y_{10} & 0 & y_8+y_9+y_{10} \end{bmatrix}.$$

根据它可画出 N 的伴随混合图 G 如图 1(b) 所示.

〈1〉行列式展开法

$$Y_{(12,56,47)}=e_{\binom{154}{145}}\,e_{\binom{267}{267}}\,(-1)^{(1+5+4+2+6+7)}\,|Y_{\overline{154}\,\overline{267}}|=|Y_{2367\,1345}|$$

$$=\begin{vmatrix} -y_7 & -y_{11} & 0 & 0 \\ 0 & y_4+y_5+y_{11} & g_m-y_4 & -g_m \\ 0 & -y_5 & -g_m & g_m-y_3 \\ -y_8 & 0 & -y_9 & -y_{10} \end{vmatrix}$$

$$= -y_7\{(y_4+y_5+y_{11})[g_m y_{10}+y_9(g_m-y_3)]-y_5[(g_m-y_4)y_{10}$$
$$+y_9 g_m]\}-y_8 y_{11}[(g_m-y_4)(g_m-y_3)-g_m^2]$$
$$= y_7\cdot y_3\cdot y_9(y_{11}+y_5+y_4)-y_7\cdot y_{10}\cdot y_5 y_4-y_8\cdot y_3\cdot y_{11}y_4$$
$$-g_m[y_7(y_4+y_{11})(y_9+y_{10})-y_8 y_{11}(y_3+y_4)].$$

〈2〉 负根有向 k-树法

$$Y_{(12,56,47)}=e_{\binom{267}{267}}\sum T_{\overset{\downarrow}{1}2,\overset{\downarrow}{5}6,\overset{\downarrow}{4}7}(y)+e_{\binom{267}{672}}\sum T_{\overset{\downarrow}{1}6,\overset{\downarrow}{5}7,\overset{\downarrow}{4}2}(y)+e_{\binom{267}{726}}\sum T_{\overset{\downarrow}{1}7,\overset{\downarrow}{5}2,\overset{\downarrow}{4}6}(y)$$
$$+e_{\binom{267}{276}}\sum T_{\overset{\downarrow}{1}2,\overset{\downarrow}{5}7,\overset{\downarrow}{4}6}(y)+e_{\binom{267}{762}}\sum T_{\overset{\downarrow}{1}7,\overset{\downarrow}{5}6,\overset{\downarrow}{4}2}(y)+e_{\binom{267}{627}}\sum T_{\overset{\downarrow}{1}6,\overset{\downarrow}{5}2,\overset{\downarrow}{4}7}(y)$$
$$=\{y_{11}y_7\cdot(y_3-g_m)\cdot y_9+y_7\cdot[g_m(y_3-g_m)+y_5(y_3-g_m)+y_5 g_m]\cdot y_9$$
$$+y_7\cdot(y_3-g_m)\cdot(y_4-g_m)y_9\}+0+\{y_8\cdot y_{11}g_m\cdot g_m\}$$
$$-\{y_{11}y_7\cdot y_{10}\cdot g_m+y_7\cdot g_m y_{10}\cdot g_m+y_7\cdot y_{10}\cdot[(y_4-g_m)g_m$$
$$+y_5(y_4-g_m)+y_5 g_m]\}-\{y_8\cdot(y_3-g_m)\cdot y_{11}(y_4-g_m)\}-0$$
$$=y_7 y_3 y_9(y_{11}+y_5+y_4)-y_7 y_{10}y_5 y_4-y_8 y_3 y_{11}y_4$$
$$-g_m[y_7(y_4+y_{11})(y_9+y_{10})-y_8 y_{11}(y_3+y_4)].$$

〈3〉 正根有向 k-树法

$$Y_{(12,56,47)}=e_{\binom{154}{154}}\sum T_{1\overset{\uparrow}{2},5\overset{\uparrow}{6},4\overset{\uparrow}{7}}(y)+e_{\binom{154}{541}}\sum T_{5\overset{\uparrow}{2},4\overset{\uparrow}{6},1\overset{\uparrow}{7}}(y)+e_{\binom{154}{415}}\sum T_{4\overset{\uparrow}{2},1\overset{\uparrow}{6},5\overset{\uparrow}{7}}(y)$$
$$+e_{\binom{154}{145}}\sum T_{1\overset{\uparrow}{2},4\overset{\uparrow}{6},5\overset{\uparrow}{7}}(y)+e_{\binom{154}{451}}\sum T_{4\overset{\uparrow}{2},5\overset{\uparrow}{6},1\overset{\uparrow}{7}}(y)+e_{\binom{154}{514}}\sum T_{5\overset{\uparrow}{2},1\overset{\uparrow}{6},4\overset{\uparrow}{7}}(y)$$
$$=\{y_{11}y_7\cdot(y_3-g_m)\cdot y_9+y_7\cdot[y_5(y_3-g_m)+y_5 g_m]\cdot y_9$$
$$+y_7\cdot(y_3-g_m)\cdot y_9 y_4\}+\{y_{11}g_m\cdot g_m\cdot y_8\}+0$$
$$-\{y_{11}y_7\cdot g_m\cdot y_{10}+y_7\cdot[g_m y_5+y_5(y_4-g_m)+g_m y_4]\cdot y_{10}\}$$
$$-\{y_{11}(y_4-g_m)\cdot(y_3-g_m)\cdot y_8\}-0$$
$$=y_7 y_3 y_9(y_{11}+y_5+y_4)-y_7 y_{10}y_5 y_4-y_8 y_3 y_{11}y_4$$
$$-g_m[y_7(y_4+y_{11})(y_9+y_{10})-y_8 y_{11}(y_3+y_4)].$$

可见三种方法的计算结果是一样的．本例中，正根 k-树法的冗余项数目比负根 k-树法的少。

参　考　文　献

[1] W. K. Chen, *IEEE Trans. on CT*, **CT-12** (1965), 85.
[2] W. K. Chen, Applied Graph Theory, Amsterdam: North-Holland, Chap. 4, 1976.
[3] 陈树柏、左垲、张良震等编，网络图论及其应用，科学出版社，1982.
[4] A. Talbot, *IEEE Trans. on CT*, **CT-13** (1966), 111.
[5] W. K.Chen, *IEEE Trans. on CT*, **CT-13** (1966), 438.
[6] А. Г. Курош 著，柯召译，高等代数教程，第二章，高等教育出版社，1956.
[7] Ф. Р. Гантмахер 著，柯召译，矩阵论，高等教育出版社，1955.
[8] 黄汝激，北京钢铁学院学报，1982 年，第 2 期，第 83 页.

TOPOLOGICAL EXPRESSIONS FOR GENERAL k-ORDER COFACTOR OF INDEFINITE-ADMITTANCE MATRIX OF ACTIVE NETWORKS

Huang Ruji

(Department of Automatic Control, Beijing Steel-Iron College)

Two topological expressions (A) and (B) and their proofs for general k-order cofactor of the indefinite-admittance matrix of an active networks are presented. The expression (A) is the unification and extension of Chen's topological expressions (1965, 1976) for 1, 2, 3-order and special k-order cofactors. The expression (B) shows that there is another topological analysis method for active networks —— positive root directed k-tree method.