

关于电子束热速度效应数值 计算的若干问题*

朱协卿

提 要

本文讨论了用计算机数值计算电子束热速度效应的方法中的两个问题。

(1) 目前计算热速度效应的方法都只适用于纯静电场的情况,为了把这类计算推广到存在复合电磁场的情况,我们推导出存在磁场后的计算公式,同时还引入了一些近似条件。

(2) 二宫提出的考虑纵向热速度分布的计算方法中电流密度公式是粗糙的。因此我们从热速度线性旁轴理论出发,推导出考虑纵向热速度分布的相应的计算公式。

一、引 言

用计算机数值计算在给定电极系统和磁场中无热速度的电子束的方法已广泛地用于微波管的电子枪和磁聚焦系统的设计^[1]。在导流系数和电压较低电子枪中,电子束的热速度效应是比较严重的,它使得用不考虑热速度效应的计算结果误差较大。文献[1]中用简单的热速度线性旁轴处理方法^[2]和空间电荷非线性修正方法^[3],通过计算一条典型的热速度轨迹 σ 来表示电子束的热速度效应,并给出包含总电流某百分数的热速度电子束的包络。但是对电子束是非层流(即存在交叉)的情况,即如对低电压返射速调管和弱流电子束管中的电子枪的情况,上述的线性旁轴计算方法也还存在着很大的误差。

迄今为止有不少文章讨论了考虑热速度的电子束的计算问题^[4-6],其中介绍计算方法比较完整的文章是 Weber 在 1967 年发表的^[5]。Weber 方法的主要内容是,假设只存在横向热速度,其分布为麦克斯韦分布,并且把整个电子束分为若干条小束;进一步假设小束的电流密度在阴极面上的分布为高斯分布,并且每个小束满足线性旁轴条件;取小束的主轨迹(零横向初速度的轨迹)为正交曲线坐标系统的一个坐标轴,计算曲线坐标系统中电子运动线性旁轴方程得出小束各横截面上的电流密度分布;将所有小束迭加就得出整个电子束的电流密度和电荷密度分布。注意在此计算方法的推导中,假设了主轨迹的曲率不能太大。

为了计算存在纵向热速度分布的电子束状态,二宫敬虔等人^[6]提出了在 Weber 计算方法的基础上加以修正的计算方法。此修正以熟知的具有纵向和横向热速度的无穷大平板二极管中电位、速度和电流密度之间的关系来等效阴极附近实际电子束中相应各量的

* 1978年9月13日收到。

关系; 而在阴极附近区域外则以选择某等效纵向速度的计算来简化具有一定纵向速度分布的大量计算。

上述两种计算方法只考虑了纯静电场下的热速度效应的计算。本文的第一部分试图补充有磁场存在时的计算, 而使考虑热速度的数值计算方法适用范围更广, 如用于磁聚焦电子束。本文的第二部分讨论了二阶计算方法中关于等效纵向速度和电流密度的计算公式问题, 推导出新的计算公式以便提高计算的精度。这两部分的工作都只涉及计算方法本身, 至于它们的实用效果还有待于今后的工作。

二、存在磁场时电子束热速度效应的计算

在电磁场中电子运动方程为:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\eta[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] \quad (1)$$

式中 \mathbf{v} 为电子运动速度矢量, η 为电子荷质比(取绝对值), \mathbf{E} 为电场强度矢量, \mathbf{B} 为磁感应强度矢量。

在轴对称磁场中电子将围绕旋转对称轴旋转。与文献[5]类似, 以曲坐标 (ξ, y, ρ) 来描述曲线小束(见图 1), 而此曲坐标系以主轨迹的角速度 $\dot{\theta}$ 绕 z 轴旋转。与 Weber 方法的纯电场情况不同, 曲坐标 ρ 轴不是主轨迹, 而是主轨迹在旋转子午面上的投影, 以下提到的主轨迹都指的是这个投影。

轴对称磁场中矢量磁位 \mathbf{A} 只有角向分量 A_θ (以下不再用下标 θ)。假设曲线小束中磁场满足旁轴条件, 即:

$$\frac{A}{r_{ce}} = \frac{A(\xi)}{r_{ce} + \xi \cos \chi} \quad \frac{A_c}{r_c} = \frac{A_c(\xi_c)}{r_c + \xi_c \cos \chi_c} \quad (2)$$

式中 A 是主轨迹上矢量磁位, $A(\xi)$ 是空间坐标 ξ 点处的矢量磁位, r_{ce} 是主轨迹离对称轴 z 的距离, χ 是主轨迹与 z 轴的夹角(见图 1)。 $A_c, A_c(\xi_c), r_c$ 和 χ_c 分别表示阴极面上相应量。由圆柱坐标的角向运动方程

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = \frac{\eta}{r} \frac{d[A(r)r]}{dt} \quad (3)$$

式中 r 相应于图 1 中 $\sqrt{(r_{ce} + \xi \cos \chi)^2 + y^2}$, y^2 是二次小量可忽略不计, $A(r)$ 即 $A(\xi)$ 。积分式(3)得出旋转角速度为:

$$\dot{\theta} = \frac{\eta}{(r_{ce} + \xi \cos \chi)^2} [A(\xi)(r_{ce} + \xi \cos \chi) - A_c(\xi_c)(r_c + \xi_c \cos \chi_c)] \quad (4)$$

将旁轴条件(2)代入得:

$$\dot{\theta} = \frac{\eta}{(r_{ce} + \xi \cos \chi)^2} \left[\frac{A}{r_{ce}} (r_{ce} + \xi \cos \chi)^2 - \frac{A_c}{r_c} (r_c + \xi_c \cos \chi_c)^2 \right]$$

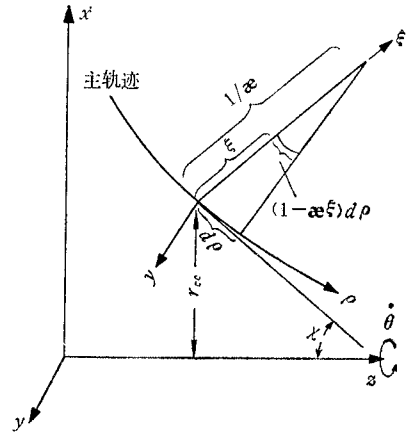


图 1

忽略二次小量后

$$\dot{\theta} = \dot{\theta}_0 + \Delta\dot{\theta} \quad (5)$$

$$\dot{\theta}_0 = \frac{\eta}{r_{ce}^2} (Ar_{ce} - A_c r_c) \quad (6)$$

$$\Delta\dot{\theta} = \frac{2\eta A_c}{r_{ce}^2} \left(\frac{r_c}{r_{ce}} \xi \cos \chi - \xi_c \cos \chi_c \right) \quad (7)$$

可见, 对主轨迹来说 ($\xi = \xi_c = 0$), $\Delta\dot{\theta} = 0$, 故主轨迹的角速度为 $\dot{\theta}_0$. 当阴极面上不存在磁场, 即 $A_c = 0$ 时, $\Delta\dot{\theta}$ 亦为零, 此时曲线小束中所有电子的角速度均为 $\dot{\theta}_0 = \frac{\eta A}{r_{ce}}$. 以下讨论中设 $\Delta\dot{\theta}$ 为小量.

选择主轨迹的旋转角速度 $\dot{\theta}_0$ 为曲坐标的角速度, 然后再列出此旋转曲坐标中电子运动方程. 与纯电场下的运动方程相比, 由于磁场和旋转存在, 所以此方程中要考虑磁场的洛伦兹力和旋转向心力.

(一) ξ 的运动方程

$$\begin{aligned} & \ddot{\xi} + \varkappa(1 - \varkappa\xi)\dot{\rho}^2 - (r_{ce} + \xi \cos \chi)(\dot{\theta}_0 + \Delta\dot{\theta})^2 \cos \chi \\ & = \eta \frac{\partial V}{\partial \xi} - \eta [(r_{ce} + \xi \cos \chi)(\dot{\theta} + \Delta\dot{\theta}) + y] B_\rho + \eta(1 - \varkappa\xi)\dot{\rho} B_y \end{aligned} \quad (8)$$

式中 \varkappa 是主轨迹的曲率, B_ρ 和 B_y 分别是 ρ 和 y 向磁感应强度分量. 将此方程与文献[5]中方程(4.12a)相比较发现, 方程(8)增加了三项, $-(r_{ce} + \xi \cos \chi)(\dot{\theta}_0 + \Delta\dot{\theta})^2 \cos \chi$ 项是由电子绕对称轴 z 旋转造成的向心加速度, 最后两项是磁场作用项.

(二) y 的运动方程

在忽略电子绕对称轴 z 旋转方向和 y 方向之差的情况下, y 的运动方程可写为:

$$y + \frac{1}{r_{ce} + \xi \cos \chi} \frac{d}{dt} [(r_{ce} + \xi \cos \chi)^2 \dot{\theta}_0] = \eta \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\eta}{r} \frac{d[A(\xi)r]}{dt} \quad (9)$$

将式(3)代入得:

$$y + \frac{1}{r_{ce} + \xi \cos \chi} \frac{d}{dt} [(r_{ce} + \xi \cos \chi)^2 \dot{\theta}_0] = \eta \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{r_{ce} + \xi \cos \chi} \frac{d}{dt} [(r_{ce} + \xi \cos \chi)^2 \dot{\theta}] \quad (10)$$

与文献[5]中方程(4.12b)相比较发现, 方程(10)增加了两项, $\frac{1}{r_{ce} + \xi \cos \chi} \frac{d}{dt} [(r_{ce} + \xi \cos \chi)^2 \dot{\theta}_0]$ 表示曲坐标的旋转加速度项, 最后一项是磁场作用项. 将式(5)代入得:

$$y = \eta \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{r_{ce} + \xi \cos \chi} \frac{d}{dt} [(r_{ce} + \xi \cos \chi)^2 \Delta\dot{\theta}] \quad (11)$$

(三) ρ 的运动方程

通常用能量守恒方程来描述 ρ 的运动方程:

$$\dot{\xi}^2 + [y + (r_{ce} + \xi \cos \chi)(\dot{\theta}_0 + \Delta\dot{\theta})]^2 + (1 - \varkappa\xi)^2 \dot{\rho}^2 = 2\eta V \quad (12)$$

采用旁轴电位表示式

$$V(\xi, \eta, \rho) = V_0 + V_\xi \xi + \frac{1}{2} V_{\xi\xi} \xi^2 + \frac{1}{2} V_{yy} y^2 \quad (13)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = V_\xi + V_{\xi\xi} \xi \quad (14)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = V_{yy}y \quad (15)$$

式中 V_0 是主轨迹 (ρ 轴) 上的电位, $V_\xi = \left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)_\xi = y = 0$, $V_{\xi\xi} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}\right)_\xi = y = 0$, $V_{yy} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_\xi = y = 0$.

将式(13)代入方程(12), 并忽略二次小量得:

$$(1 - 2\alpha\xi)\rho^2 = 2\eta(V_0 + V_\xi\xi) - r_{ce}^2\dot{\theta}_0^2 - 2r_{ce}\xi\dot{\theta}_0^2\cos\chi - 2r_{ce}^2\dot{\theta}_0\Delta\dot{\theta} - 2r_{ce}y\dot{\theta}_0 \quad (16)$$

在方程(8)和(11)中可见, 无论是 ξ 方程还是 y 方程都有二个变量 ξ 和 y . 为此我们只解在 $y=0$ 平面(即子午面)上的 ξ 方程(8)和 $\xi=0$ 平面(即弧矢面)上的 y 方程(11). 用这两个解计算出的曲线小束的电流密度分布与实际电流密度分布会有一些的误差, 但是由于在子午面和弧矢面上解是可靠的, 所以可以认为它的计算结果仍具有相当的近似性.

在 $y=0$ 平面上, 方程(8)中 $B_y = 0$, y 由方程(11)积分解出. 将式(15)代入并假定轨迹变化较慢, 可得:

$$\dot{y} = (r_{ce} + \xi\cos\chi)\Delta\dot{\theta}$$

忽略二次小量

$$\dot{y} = r_{ce}\Delta\dot{\theta} \quad (17)$$

于是方程(8)可写为:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + \alpha(1 - \alpha\xi)\rho^2 - (r_{ce} + \xi\cos\chi)(\dot{\theta}_0^2 + 2\dot{\theta}_0\Delta\dot{\theta})\cos\chi - \eta(V_\xi + V_{\xi\xi}\xi) \\ + \eta[(r_{ce} + \xi\cos\chi)(\dot{\theta}_0 + \Delta\dot{\theta}) + r_{ce}\Delta\dot{\theta}]B_\rho = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

由式(16)来表示上方程的第二项, 在 $y=0$ 和主轨迹曲率 α 较小及忽略二次小量情况下为:

$$\begin{aligned} \alpha(1 - \alpha\xi)\rho^2 = 2\eta\alpha[V_0(1 + \alpha\xi) + V_\xi\xi] - r_{ce}^2\dot{\theta}_0\alpha(1 + \alpha\xi) \\ - \alpha(2r_{ce}\dot{\theta}_0^2\xi\cos\chi + 2r_{ce}^2\dot{\theta}_0\Delta\dot{\theta}) \end{aligned}$$

将上式代入方程(18), 再取 $\ddot{\xi} = \xi = \Delta\dot{\theta} = 0$, 此时方程的解就是主轨迹, 可得主轨迹曲率为:

$$\alpha = \frac{\eta(V_\xi - r_{ce}\dot{\theta}_0 B_\rho) + r_{ce}\dot{\theta}_0^2\cos\chi}{2\eta V_0 - r_{ce}^2\dot{\theta}_0^2} \quad (19)$$

代回方程(18), 并考虑式(7)可得:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + \left\{ \frac{[\eta(V_\xi - r_{ce}\dot{\theta}_0 B_\rho) + r_{ce}\dot{\theta}_0^2\cos\chi] [\eta(V_\xi - r_{ce}\dot{\theta}_0 B_\rho) + r_{ce}\dot{\theta}_0^2\cos\chi + 2\eta V_\xi - 2r_{ce}\dot{\theta}_0\cos\chi]}{2\eta V_0 - r_{ce}^2\dot{\theta}_0^2} \right. \\ \left. - \frac{4\eta A_c r_{ce}\dot{\theta}_0^2\cos\chi}{r_{ce}^2} \right\} - \dot{\theta}_0^2\cos^2\chi - \eta V_{\xi\xi} - \eta\dot{\theta}_0 B_\rho\cos\chi - \frac{4\eta A_c r_{ce}\cos\chi}{r_{ce}^2} (\dot{\theta}_0\cos\chi - \eta B_\rho) \Big\} \xi \\ + \frac{4\eta A_c \xi_c \cos\chi_c}{r_{ce}} \left\{ \dot{\theta}_0\cos\chi - \eta B_\rho + \frac{[\eta(V_\xi - r_{ce}\dot{\theta}_0 B_\rho) + r_{ce}\dot{\theta}_0^2\cos\chi]\dot{\theta}_0}{2\eta V_0 - r_{ce}^2\dot{\theta}_0^2} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

或

$$\ddot{\xi} + P(\rho)\xi + \theta(\rho)\xi_c = 0 \quad (21)$$

当磁场为零, 即 $\dot{\theta}_0 = B_\rho = A_c = 0$, 方程(20)就变为:

$$\ddot{\xi} + \eta \left(\frac{3V_\xi^2}{2V_0} - V_{\xi\xi} \right) \xi = 0 \quad (22)$$

此方程与文献[5]中方程(4.20a)相同。

在 $\xi = 0$ 平面上,由式(7)可见 $\Delta\dot{\theta} = 0$,将它和式(15)代入方程(11)得:

$$\dot{y} = \eta V_{yy} y \quad (23)$$

由方程(12)并忽略二次小量得:

$$\dot{\rho}^2 = 2\eta V_0 - r_{cc}^2 \dot{\theta}_0^2$$

积分得: $t - t_0 = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{2\eta V_0 - r_{cc}^2 \dot{\theta}_0^2}}$

将式(6)代入

$$t - t_0 = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{2\eta V_0 - \eta^2 (Ar_{cc} - A_c r_c)^2 / r_{cc}^2}} \quad (24)$$

上述的方程(20),(23)和(24)就是曲线小束的三个运动方程。在计算出上述三个方程解后,还要象文献[5]中式(4.38),(4.39)和(4.72)那样计算小束在 ξ 方向和 y 方向的特征值 R 和 \bar{R} ,以及环形束的电荷密度。但需要注意的是方程(20)或(21)是非齐次线性方程,因此有必要着重讨论非齐次线性方程下特征值 R 的计算公式。

取非齐次线性方程(21)的齐次部分 $\ddot{\xi} + P(\rho)\xi = 0$, 设 $M(\rho)$ 和 $S(\rho)$ 是齐次方程的两个线性不相关的解,其阴极上初始条件为:

$$M(\rho_c) = 1 \quad \dot{M}(\rho_c) = 0 \quad S(\rho_c) = 0 \quad \dot{S}(\rho_c) = 1 \quad (25)$$

则非齐次线性方程(21)的解可写为:

$$\begin{cases} \xi = \xi_c \left(M - S \int_0^t Q M dt + M \int_0^t Q S dt \right) + \dot{\xi}_c S \\ \dot{\xi} = \xi_c \left(\dot{M} - \dot{S} \int_0^t Q M dt + \dot{M} \int_0^t Q S dt \right) + \dot{\xi}_c \dot{S} \end{cases} \quad (26)$$

令

$$\begin{cases} M_1 = M - S \int_0^t Q M dt + M \int_0^t Q S dt \\ \dot{M}_1 = \dot{M} - \dot{S} \int_0^t Q M dt + \dot{M} \int_0^t Q S dt \end{cases} \quad (27)$$

显然, M_1 也就是初始条件 $\xi_c = 1$ 和 $\dot{\xi}_c = 0$ 下方程(21)的解,式(26)可写为:

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & S \\ \dot{M}_1 & \dot{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_c \\ \dot{\xi}_c \end{bmatrix} \quad (28)$$

由上式可见,非齐次线性方程的解的形式与齐次线性方程的解的形式相同,但是齐次方程的朗斯基为常数 1:

$$M\dot{S} - \dot{M}S = M(\rho_c)\dot{S}(\rho_c) - \dot{M}(\rho_c)S(\rho_c) = 1$$

而非齐次方程的朗斯基不是常数:

$$M_1\dot{S} - \dot{M}_1S = M\dot{S} - \dot{M}S + (M\dot{S} - \dot{M}S) \int_0^t Q S dt = 1 + \int_0^t Q S dt \quad (29)$$

令小束的 ξ 向特征值 R 为:

$$R^2 = R_0^2 M_1^2 + \Theta_0^2 S^2 \quad (30)$$

式中 R_0 为阴极上小束发射电流密度高斯分布的特征值, Θ_0 为最可几速度

$$\left(\Theta_0 = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \right),$$

k 是玻耳兹曼常数, T 是阴极绝对温度, m 是电子质量。由于方程(21)是非齐次线性方

程, ξ 向特征值 R 不能象文献[5]那样直接给出 R 的方程, 只能由方程(21)解出 M_1 和 S , 再代入式(30)计算出.

y 向电子运动方程(23)是齐次线性方程, 其解为:

$$\begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{M} & \bar{S} \\ \dot{\bar{M}} & \dot{\bar{S}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_c \\ \dot{y}_c \end{bmatrix} \quad (31)$$

式中 \bar{M} 和 \bar{S} 是此方程的两个线性不相关解, \bar{M} 和 \bar{S} 的初始条件与式(25)类似:

$$\bar{M}(\rho_c) = 1 \quad \dot{\bar{M}}(\rho_c) = 0 \quad \bar{S}(\rho_c) = 0 \quad \dot{\bar{S}}(\rho_c) = 1 \quad (32)$$

方程的朗斯基为:

$$\bar{M}\dot{\bar{S}} - \dot{\bar{M}}\bar{S} = 1 \quad (33)$$

y 向特征值 \bar{R} 定义为:

$$\bar{R}^2 = R_0^2 \bar{M}^2 + \Theta_0^2 \bar{S}^2 \quad (34)$$

可将方程(23)写为:

$$\ddot{\bar{M}} - \eta V_{yy} \bar{M} = 0 \quad (35)$$

$$\ddot{\bar{S}} - \eta V_{yy} \bar{S} = 0 \quad (36)$$

将 $R_0^2 \bar{M}$ 乘方程(35)再加上 $\Theta_0^2 \bar{S}$ 乘方程(36), 整理后得:

$$\ddot{\bar{R}} - \eta V_{yy} \bar{R} - \frac{\Theta_0^2 R_0^2}{\bar{R}^3} = 0 \quad (37)$$

y 向特征值 \bar{R} 可由上方程解出, 其初始条件为:

$$\bar{R}(\rho_c) = R_0, \quad \dot{\bar{R}}(\rho_c) = 0 \quad (38)$$

根据上述两个特征值 R 和 \bar{R} , 由阴极发射电流密度高斯分布, 利用刘维定理, 最后可导出小束电流密度 J_b 和环形束空间电荷密度 ρ_{an} :

$$J_b(\xi, y, \rho) = \frac{I_b}{\pi R \bar{R}} \exp \left[-\frac{(M_1 \dot{S} - \dot{M}_1 S)^2 \xi}{R^2} - \frac{y^2}{\bar{R}^2} \right] \quad (39)$$

$$P_{an}(r, z) = \frac{I_{an}}{2\pi^2 R \bar{R} \sqrt{2\eta V_0}} \int_0^{2\pi} \exp \left[-\frac{(M_1 \dot{S} - \dot{M}_1 S)^2 (r \cos \theta - r_{ce})^2 \cos^2 \chi}{R^2} - \frac{r^2 \sin^2 \chi}{\bar{R}^2} \right] d\theta \quad (40)$$

式中 I_b 为小束电流, I_{an} 为环形束电流. 关于式(39)和(40)的推导步骤可参照文献[5]中 4.3.2 和 4.6.1.

由于方程(20)和(21)极为复杂, 所以计算 M_1 , S 和 R 将是十分繁琐的. 为此可采用在子午面上直接解两条典型轨迹的简易方法, 这两条典型轨迹分别为 r_c 和 $\sqrt{2}\sigma$, 其初始条件为:

$$\left. \begin{aligned} r_c(\rho_c) &= r_c + R_0 \cos \chi_{c0}, & \dot{r}_c(\rho_c) &= 0 \\ \sqrt{2}\sigma(\rho_c) &= r_c, & \sqrt{2}\dot{\sigma}(\rho_c) &= \Theta_0 \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

r_c 和 $\sqrt{2}\sigma$ 与主轨迹 r_{ce} 在 ξ 座标方向之差分别称为 ξ_c 和 $\sqrt{2}\xi_\sigma$. 因此 ξ 向特征值 R 为:

$$R^2 = \xi_c^2 + 2\xi_\sigma^2 \quad (42)$$

式(39)和(40)中所用的 $(M_1 \dot{S} - \dot{M}_1 S)^2$ 值为:

$$(M_1 \dot{S} - \dot{M}_1 S)^2 = \frac{1}{R_0^2 \Theta_0^2} (\xi_c \sqrt{2} \dot{\xi}_\sigma - \dot{\xi}_c \sqrt{2} \xi_\sigma)^2 \quad (43)$$

以上讨论的关于存在磁场时电子束热速度效应的计算方法中, 除了所述的运动方程、

小束特征值、小束电流密度和环形束空间电荷密度等方面的计算与纯电场下 Weber 法有差别外,其它部分的计算与 Weber 法完全相同,这里不再赘述。

三、具有纵向热速度分布电子束的计算

二宫进度等人^[8]以 Weber 计算横向热速度的方法为基础,提出考虑纵向热速度分布的计算方法。此方法把计算空间分为两个区:阴极附近区和远离阴极区,见图 2。把阴极附近区等效为熟知的平板二极管,用来计算通过虚阴极的电流密度、虚阴极电位和位置以及纵向电位分布。在远离阴极区仍采用 Weber 法的一系列计算公式,但是用等效纵向速度来代替具有一定分布的纵向热速度作用。下面先简述二宫方法的基本计算公式,然后着重讨论它的电流密度公式。

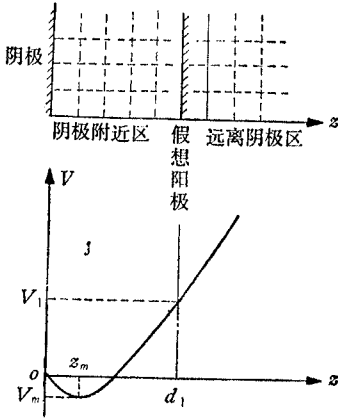


图 2

(一) 二宫计算方法的公式

二宫法以纵向等效速度来代替远离阴极区中纵向热速度分布作用,并认为等效速度由平板二极管中空间电荷密度 ρ 与电位 V 之间的关系式来确定。平板二极管中泊松方程为:

$$\frac{d^2V}{dz^2} = \frac{\rho(z)}{\epsilon_0} \quad (44)$$

令

$$\gamma = \frac{2\eta V}{\Theta_0^2} + \ln \frac{J_T}{J_A} \quad (45)$$

式中 J_T 是阴极发射密度, J_A 是通过虚阴极的电流密度。将式(45)代入方程(44)得:

$$\rho(z) = \frac{\epsilon_0 \Theta_0^2}{2\eta} \frac{d^2\gamma}{dz^2} \quad (46)$$

根据熟知的平板二极管中虚阴极后的电位分布代入得:

$$\rho(z) = \frac{\sqrt{\pi} J_A}{\Theta_0} \exp(\gamma) [1 - \operatorname{erf}(\gamma^{1/2})] \quad (47)$$

式中 erf 是误差函数。

二宫法认为上式中电荷密度 ρ 与电流密度 J_A 之间的关系反映了它的等效纵向速度 v_{eq} 。

$$v_{eq} = \frac{J_A}{\rho} = \frac{\Theta_0}{\sqrt{\pi} \exp(\gamma) [1 - \operatorname{erf}(\gamma^{1/2})]} \quad (48)$$

显然,不同的位置(即不同的电位值)它的等效纵向初速不同。只有当 V 很大 ($\gamma \gg 1$) 时,函数 $\operatorname{erf}(x)$ 渐近式为:

$$\operatorname{erf}(x) \approx 1 - \frac{\exp(-x^2)}{\sqrt{\pi} x}$$

代入式(48)得电位很大处的等效速度为:

$$v_{eq} = \Theta_0 \gamma^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\eta(V - V_m)} \quad (49)$$

式中 V_m 是虚阴极负电位值 $V_m = \frac{\Theta_0^2}{2\eta} \ln \frac{J_A}{J_T}$. 此时相应的等效纵向初速 $v_{eqc} = \sqrt{-2\eta V_m}$

为定值.

二官法用等效纵向速度关系式(48)来计算远离阴极区中各种参量. 在计算主轨迹时,先用式(48)确定阴极附近区中经过虚阴极的电子的纵向速度,然后用一般数值差分法计算远离阴极区的主轨迹. 尽管它的计算公式十分复杂(见文献[8]中式(13)和(14)),而实质上相当于在假想阳极面上以此点等效纵向速度 v_{eq1} 发出的电子的轨迹,由式(48)得:

$$v_{eq1} = \frac{\Theta_0}{\sqrt{\pi \exp(\gamma_1) [1 - \operatorname{erf}(\gamma_1^{1/2})]}} \quad (50)$$

式中 γ_1 是与假想阳极面电位 V_1 相应的 γ 值. 按能量守恒方程,它相当于阴极上等效纵向初速为:

$$v_{eqc} = \left\{ \frac{\Theta_0^2}{\pi \exp \left[\frac{4\eta(V_1 - V_m)}{\Theta_0^2} \right] \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2\eta(V_1 - V_m)}}{\Theta_0} \right) \right]^2} - 2\eta V_1 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (51)$$

在计算 ξ 向方程时,对反映主轨迹弯曲的作用项(即方程(22)中 $\frac{3V_\xi^2}{2V_0}$)的 V_0 由 $V_0 + \frac{v_{eqc}^2}{2\eta}$ 代替. 小束电流密度公式与 Weber 法的公式相同:

$$J_b(\xi, y, \rho) = \frac{I_b}{\pi R R} \exp \left(-\frac{\xi^2}{R^2} - \frac{y^2}{R^2} \right) \quad (52)$$

在环形束空间电荷密度公式中(见式(40)),分母的 $\sqrt{2\eta V_0}$ 用式(48)的 v_{eq} 来代替.

(二) 对二官算法的讨论

二官法对阴极附近区的等效平板二极管处理方法能反映纵向热速度造成电位分布变化的作用,并可确定虚阴极的电位和位置及通过虚阴极的电流密度值. 由于此区十分靠近阴极,与一般计算无热速度电子束和横向热速度电子束的阴极附近处理法^[1,5]一样,可认为是合理的. 但是二官法以平板二极管的电荷密度公式中等效纵向速度和电位之间的关系来表示远离阴极区中电子束的等效纵向速度,而对采用这种处理方法的理由并未给出证明或解释.

为此我们主要讨论在远离阴极区的等效纵向速度问题,并导出电流密度和电荷密度的计算公式. 为了便于与文献[8]的结果相对比,下面只讨论纯静电场情况,并首先研究直线轴对称小束.

1. 考虑纵向热速度的小束电流密度

采用热速度线性理论处理方法^[9],可写出横向电子运动方程:

$$\ddot{w} + \frac{\eta}{2} \left(V_0'' - \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \right) w = 0 \quad (53)$$

式中 $w = x + iy$, x 和 y 分别是两个横向直角坐标, V_0 和 ρ_0 分别是轴上电位和空间电荷

密度.

纵向运动方程,即能量守恒方程为:

$$\dot{z}^2 = 2\eta V_0 + \dot{Z}^2 = 2\eta V_* \quad (54)$$

式中 \dot{Z} 表示阴极上纵向初速度. 将上两个方程组合可得轨迹方程为:

$$w'' + \frac{V'_0}{2V_*} w' + \frac{(V''_0 - \rho_0/\epsilon_0)}{4V_*} w = 0 \quad (55)$$

当纵向初速度存在一定分布时, 对应一个初速有一个 V_* 值和 w 值. 设某参考纵向初速度 \dot{Z}_{re} :

$$\dot{Z}_{re}^2 = 2\eta(V_{re} - V_0) \quad (56)$$

V_{re} 是对应此参考初速的电位. 式(54)可写为:

$$V_* = V_{re} \left(1 + \frac{\dot{Z}^2 - \dot{Z}_{re}^2}{2\eta V_{re}} \right) = V_{re}(1 + \epsilon) \quad (57)$$

$$\epsilon = \frac{\dot{Z}^2 - \dot{Z}_{re}^2}{2\eta V_{re}} \quad (58)$$

ϵ 表示纵向初始能量对于初始参考能量的相对变化.

假定 ϵ 是一个小量, 显然这只在 V_{re} 不太小和 \dot{Z} 不太大时才行. 实际上在远离阴极区这个假设基本上能满足, 因为这个区中 V_{re} 不太小, 并由纵向初速麦克斯韦分布可知, 发射电子密度的或然率正比于 $\exp\left(-\frac{\dot{Z}^2}{\Theta_0^2}\right)$, 当 \dot{Z} 越大, 电子密度或然率越小, \dot{Z} 大的电子的影响可以忽略. 由此可得:

$$\frac{1}{V_*} \approx \frac{1}{V_{re}} (1 - \epsilon)$$

代入方程(55)

$$w'' + \frac{V'_0}{2V_{re}} w' + \frac{(V''_0 - \rho_0/\epsilon_0)}{4V_{re}} w - \left[\frac{V'_0}{2V_{re}} w' - \frac{(V''_0 - \rho_0/\epsilon_0)}{4V_{re}} \right] \epsilon = 0 \quad (59)$$

设 $\epsilon = 0$ 时方程(59)的解为 w_{re} , 由 ϵ 为小量的假设可认为不同初始纵向速度下 w 与 w_{re} 的差别不太大, 也就可以将 w_{re} 代入上方方程的方括号内:

$$w'' + \frac{V'_0}{2V_{re}} w' + \frac{(V''_0 - \rho_0/\epsilon_0)}{4V_{re}} w - \left[\frac{V'_0}{2V_{re}} w'_{re} + \frac{(V''_0 - \rho_0/\epsilon_0)w_{re}}{4V_{re}} \right] \epsilon = 0$$

或

$$w'' + \frac{V'_0}{2V_{re}} w' + \frac{(V''_0 - \rho_0/\epsilon_0)}{4V_{re}} w + w'_{re}\epsilon = 0 \quad (60)$$

所以非齐次线性方程(60)的解近似表示齐次方程(55)的解. 此方程的两个线性不相关的解为:

$$M = M_{re} + \left[M_{re} \int_{z_c}^z M''_{re} S_{re} dz - S_{re} \int_{z_c}^z M'_{re} M_{re} dz \right] \epsilon = M_{re} + g_M \epsilon \quad (61)$$

$$S = S_{re} + \left[M_{re} \int_{z_c}^z S''_{re} S_{re} dz - S_{re} \int_{z_c}^z S'_{re} M_{re} dz \right] \epsilon = S_{re} + g_S \epsilon \quad (62)$$

方程(55)的近似解(即方程(60)的解)为:

$$C = \frac{(R_0^2 g_M M_{re} + \Theta_0^2 g_S S_{re})}{\eta R_{re}^2 V_{re}} \quad (73)$$

显然系数 C 也是一个小量.

设有两种参考纵向初速 \dot{Z}_{re1} 和 \dot{Z}_{re2} , 相应的参考特征值式 (71) 分别为 R_{re1} 和 R_{re2} , 式 (73) 的系数分别为 C_1 和 C_2 . 式 (72) 可以用两种参考值表示:

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{R_{re1}^2} [1 - C_1(\dot{Z}^2 - \dot{Z}_{re1}^2)]$$

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{R_{re2}^2} [1 - C_2(\dot{Z}^2 - \dot{Z}_{re2}^2)]$$

用上两式分别表示式 (69) 中两个 $1/R^2$ 值, 则得:

$$\begin{aligned} J(r, z) = & \frac{2I}{\pi \Theta_0^2} \int_{\sqrt{-2\eta V_M}}^{\infty} \dot{Z} \exp\left(-\frac{\dot{Z}^2}{\Theta_0^2}\right) \frac{1}{R_{re1}^2} [1 - C_1(\dot{Z}^2 - \dot{Z}_{re1}^2)] \exp\left\{-\frac{r^2}{R_{re2}^2} [1 \right. \\ & \left. - C_2(\dot{Z}^2 - \dot{Z}_{re2}^2)]\right\} d\dot{Z} = \frac{I R_{re2}^2 \exp\left(\frac{2\eta V_M}{\Theta_0^2}\right)}{\pi R_{re1}^2 (R_{re2}^2 - C_2 r^2)} \left[1 + C_1(\dot{Z}_{re1}^2 \right. \\ & \left. + 2\eta V_M - \frac{R_{re2}^2 \Theta_0^2}{R_{re2}^2 - C_2 r^2})\right] \exp\left\{-\frac{r^2}{R_{re2}^2} [1 + C_2(\dot{Z}_{re2}^2 + 2\eta V_M)]\right\} \end{aligned}$$

由于 C 是小量, 可以认为在 r 的计算范围内 $C_2 r^2 \ll R_{re2}^2$, 则上式可简化为:

$$J(r, z) = \frac{I_b}{\pi R_{re1}^2} [1 + C_1(\dot{Z}_{re1}^2 + 2\eta V_M - \Theta_0^2)] \exp\left\{-\frac{r^2}{R_{re2}^2} [1 + C_2(\dot{Z}_{re2}^2 + 2\eta V_M)]\right\} \quad (74)$$

式中 I_b 为通过虚阴极的电子束电流

$$I_b = I \exp\left(\frac{2\eta V_M}{\Theta_0^2}\right) \quad (75)$$

如果选择两种参考纵向初速度

$$\dot{Z}_{re1} = (\Theta_0^2 - 2\eta V_M)^{\frac{1}{2}} \quad (76)$$

$$\dot{Z}_{re2} = (-2\eta V_M)^{\frac{1}{2}} \quad (77)$$

则式 (74) 的形式十分简单

$$J(r, z) = \frac{I_b}{\pi R_{re1}^2} \exp\left(-\frac{r^2}{R_{re2}^2}\right) \quad (78)$$

由上式可见, 考虑纵向热速度分布电子束中电流密度可以用类似于无纵向热速度分布的束电流密度公式表示, 但要采用两种不同的纵向初速计算的特征值. 一种纵向初速 \dot{Z}_{re1} 相应于虚阴极处位能的绝对值加上最可几速度动能; 另一种纵向初速 \dot{Z}_{re2} 相应于虚阴极处位能的绝对值.

对于曲线小束来说, 其电流密度公式也可类似地导出:

$$J_b(\xi, y, \rho) = \frac{I_b}{\pi R_{re1} \bar{R}_{re1}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{R_{re2}^2} - \frac{y^2}{\bar{R}_{re2}^2}\right) \quad (79)$$

2. 考虑纵向热速度分布的小束空间电荷密度

计算出小束电流密度后,可以由定义来计算电荷密度:

$$\rho = \frac{J}{v_\rho} \quad (80)$$

式中 v_ρ 是 ρ 向速度分量. 由于存在纵向热速度分布, 所以相应于纵向初速范围 $\sqrt{-2\eta V_M} \rightarrow \infty$ 的电子在空间点的 ρ 的速度范围为 $\sqrt{2\eta(V_0 - V_M)} \rightarrow \infty$, V_0 是此点电位值. 式(80)中 v_ρ 的效果显然为此速度范围内的统计平均:

$$v_{eq} = \frac{\int_{\sqrt{2\eta(V_0 - V_M)}}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v_\rho \tau d\xi d\eta dv_\rho}{\int_{\sqrt{2\eta(V_0 - V_M)}}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tau d\xi d\eta dv_\rho} \quad (81)$$

式中 τ 是相空间电子密度. 由刘维定理将阴极上按麦克斯韦分布的相空间电子密度代入式(81), 并积分得:

$$v_{eq} = \frac{\int_{\sqrt{2\eta(V_0 - V_M)}}^{\infty} v_\rho \exp\left(-\frac{v_{\rho c}^2}{\Theta_0^2}\right) dv_\rho}{\int_{\sqrt{2\eta(V_0 - V_M)}}^{\infty} \exp\left(-\frac{v_{\rho c}^2}{\Theta_0^2}\right) dv_\rho} \quad (82)$$

式中 $v_{\rho c}$ 是阴极上的 v_ρ 值. 由能量守恒方程并忽略 ξ^2 和 η^2 小量:

$$v_\rho^2 - v_{\rho c}^2 = 2\eta V_0 \quad v_\rho dv_\rho = v_{\rho c} dv_{\rho c}$$

代入式(82)得:

$$\begin{aligned} v_{eq} &= \frac{\int_{\sqrt{-2\eta V_M}}^{\infty} v_{\rho c} \exp\left(-\frac{v_{\rho c}^2}{\Theta_0^2}\right) dv_{\rho c}}{\int_{\sqrt{2\eta(V_0 - V_M)}}^{\infty} \exp\left(-\frac{v_\rho^2 - 2\eta V_0}{\Theta_0^2}\right) dv_\rho} \\ &= \frac{\Theta_0^2}{\sqrt{\pi} \exp\left[\frac{2\eta(V_0 - V_M)}{\Theta_0^2}\right] \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2\eta(V_0 - V_M)}}{\Theta_0}\right)\right]} \end{aligned} \quad (83)$$

综合式(40), (79)和(83)可得环形束电荷密度公式为:

$$\rho_{an}(r, z) = \frac{I_{an}}{2\pi^2 R_{rc1} \bar{R}_{rc1} v_{eq}} \int_0^{2\pi} \exp\left[-\frac{(r \cos\theta - r_{cc})^2 \cos^2\chi}{R_{rc2}^2} - \frac{r^2 \sin^2\theta}{\bar{R}_{rc2}^2}\right] d\theta \quad (84)$$

3. 讨论

根据上面推导的计算公式, 在计算电荷密度中用的等效速度 v_{eq} 公式(83)与二官法的等效速度公式(48)完全一样. 说明此关系式并不只是平板二极管中电荷密度与电流密度之间的关系, 而只要在横向能量比纵向能量小得多的条件下, 那么此关系式就表示纵向热速度分布的统计结果.

我们推导的电流密度计算公式(79)与二官法的计算公式(52)不同, 因为二官法并未考虑纵向热速度分布对于小束电流密度分布的影响.

在计算主轨迹时,二官法实际上采用某个纵向初始速度(见式(51)),我们认为纵向初速对于主轨迹影响不太大. 因为无论 Weber 法或是二官法都假设主轨迹曲率不能太大,即主轨迹弯曲不太严重,那么不同纵向初速对主轨迹的变化也不太大. 如二极管中主轨迹与纵向初速无关,其原因是主轨迹为直线. 只有在轨迹严重弯曲情况下,纵向初速对主轨迹影响才严重,但此时 Weber 法和二官法本身已不能应用了. 实际计算中可以任意取某纵向初速(如 $v_{pc} = \sqrt{\Theta_0^2 - 2\eta V_M}$)来计算主轨迹.

四、结 论

本文讨论了用计算机数值计算热速度电子束方法中的两个问题,一个是补充存在磁场情况下的 Weber 算法,另一个是对考虑纵向热速度分布的二官算法提出修正. 这些讨论都是以热速度效应的线性理论为基础的,因为在数值计算中将整个电子束分成若干条小束,可认为每个小束都满足旁轴线性条件.

在计算存在磁场下热速度电子束中,旋转曲坐标的 ξ 和 ν 方向的运动方程有交连. 实际上只能以解子午面上 ξ 方程和弧矢面上 ν 方程来近似,偏离子午面和弧矢面越大误差也越大. 也就是说要求 ξ 和 ν 不能太大,对于阴极上有磁场的情况下还要求 $\Delta\theta$ 较小. 由式(7)可见只要磁力线与主轨迹偏离不严重,那么 $\Delta\theta$ 也不会太大. 此外在存在磁场情况的推导中假设轨迹变化不能太快. 这些条件在微波管电子光学系统中基本上都能满足.

在计算考虑纵向热速度分布的电子束中,假设了主轨迹弯曲不太严重,所以不同的纵向初速对主轨迹影响不大. 实际上此假设在 Weber 计算方法的推导中就已存在(见推导式(19)前的条件). 所以迄今所见的热速度电子束的数值计算方法都只能适用于轨迹无严重弯曲的情况. 反射速调管电子枪的轨迹曲率小, Weber 在他的计算中给出了良好的精确度. 电子束管电子枪在交叉点附近轨迹曲率极大,二官等人的计算误差就相当大. 目前关于电子束管电子枪和磁控注入型电子枪的热速度数值计算问题还有待于进一步研究解决.

本项工作得到了江钧基同志的鼓励和帮助.

参 考 文 献

- [1] 电子管手册编写委员会,微波管电子光学系统设计手册,第九章(待出版).
- [2] C. C. Cutler and M. E. Hines, *Proc. IRE*, **43**(1955), 307.
- [3] W. E. Danielson, J. Z. Rosenfeld and J. A. Saloom, *Bell. Sys. Tech. J.* **35**(1956), 375.
- [4] C. Weber, *Proc. IEEE*, **52**(1964), 996.
- [5] C. Weber, *Philips Research Reports, Supplement* (1967), b, 1.
- [6] M. A. Cunningham, R. P. Pitenour, H. W. Larber and R. J. Lapre, *Proc. IEEE*, **56**(1968), 347.
- [7] K. Amboss and G. R. Nudd, *Proc. IEEE*, **57**(1969), 1303.
- [8] 二官敬虔,浦野忠矢和大越孝敬,电子通信学会论文誌 54-B(1971), 490.
- [9] P. T. Kirstein, *IEEE, Trans. on ED*, **ED-10**(1963), 69.

$$\begin{bmatrix} w \\ iw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & S \\ \dot{M} & \dot{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{W} \\ \dot{\bar{W}} \end{bmatrix} \quad (63)$$

和

$$\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & S \\ \dot{M} & \dot{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \dot{X} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & S \\ \dot{M} & \dot{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ \dot{Y} \end{bmatrix} \quad (64)$$

式中 \bar{W} , $\dot{\bar{W}}$, X , \dot{X} , Y , \dot{Y} 分别是阴极上的 w , \dot{w} , x , \dot{x} , y , \dot{y} 值。

应用刘维定理, 在初速按麦克斯韦分布的电子束中电流密度为:

$$J(x, y, z) = \frac{2}{\pi\Theta_0^4} \int_{\sqrt{-2\eta V_m}}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{Z} J_T(X, Y) \exp\left[-\frac{1}{\Theta_0^2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2)\right] d\dot{x}d\dot{y}d\dot{Z} \quad (65)$$

当阴极电流密度 J_T 为高斯分布

$$J_T(X, Y) = \frac{I}{\pi R_0^2} \exp\left(-\frac{X^2 + Y^2}{R_0^2}\right) \quad (66)$$

式中 I 是阴极发射电流. 将式(64)写成:

$$\begin{aligned} X &= \dot{S}x - S\dot{x} & Y &= \dot{S}y - S\dot{y} \\ \dot{X} &= M\dot{x} - \dot{M}x & \dot{Y} &= M\dot{y} - \dot{M}y \end{aligned}$$

代入式(65)得:

$$\begin{aligned} J(x, y, z) &= \frac{2}{\pi\Theta_0^4} \int_{\sqrt{-2\eta V_m}}^{\infty} \dot{Z} \exp\left(-\frac{\dot{Z}^2}{\Theta_0^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I}{\pi R_0^2} \\ &\exp\left[-\frac{(\dot{S}x - S\dot{x})^2 + (\dot{S}y - S\dot{y})^2}{R_0^2} - \frac{(M\dot{x} - \dot{M}x)^2 + (M\dot{y} - \dot{M}y)^2}{\Theta_0^2}\right] d\dot{x}d\dot{y}d\dot{Z} \quad (67) \end{aligned}$$

令

$$R^2 = R_0^2 M^2 + \Theta_0^2 S^2 \quad (68)$$

式(67)可积分得:

$$J(r, z) = \frac{2I}{\pi\Theta_0^2} \int_{\sqrt{-2\eta V_m}}^{\infty} \dot{Z} \exp\left(-\frac{\dot{Z}^2}{\Theta_0^2}\right) \frac{1}{R^2} \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right) d\dot{Z} \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2}) \quad (69)$$

如果特征值 R 与 \dot{Z} 无关, 上式为:

$$J(r, z) = \frac{I}{\pi R^2} \exp\left(\frac{2\eta V_m}{\Theta_0^2}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right)$$

即忽略纵向热速度的结果。

为了讨论存在纵向热速度分布时 R 与 \dot{Z} (或 ε) 的关系, 将式(61)和(62)代入式(68)得:

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{(R_0^2 M_{re}^2 + \Theta_0^2 S_{re}^2) + 2(R_0^2 g_M M_{re} + \Theta_0^2 g_S S_{re})\varepsilon + (R_0^2 g_M^2 + \Theta_0^2 g_S^2)\varepsilon^2}$$

由 ε 为小量的假设, 上式近似为:

$$\frac{1}{R^2} \approx \frac{1}{R_{re}^2} \left[1 - \frac{2(R_0^2 g_M M_{re} + \Theta_0^2 g_S S_{re})}{R_{re}^2} \varepsilon \right] \quad (70)$$

式中

$$R_{re}^2 = R_0^2 M_{re}^2 + \Theta_0^2 S_{re}^2 \quad (71)$$

再将式(58)代入式(70)得:

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{R_{re}^2} [1 - C(\dot{Z}^2 - \dot{Z}_{re}^2)] \quad (72)$$