

# 帧同步一次通过捕获概率\*

隋厚棠

(中国科学院空间科学技术中心)

## 提 要

本文讨论了二进数据帧同步理论问题,引进了随机数据对帧同步捕获的影响。在同步图像\*\*长度和结构、帧长度、误码率、判决门限之间建立了数学表达式,即一次通过捕获概率表达式。最后还给出了最佳帧结构设计方法。并对信道效率与捕获概率之间的关系作了简单说明。

## 一、引 言

帧同步问题可以分为两大类,第一类是前缀法或称为逗点法,即周期地在数据流中插入特殊的固定的同步图像。第二类是无逗点法,这种方法是利用码典中所定义的码字与重叠字之间的区别来实现同步。前一种方法比较简单易行,目前应用较多,当使用长帧时有较高的效率。所以本文将讨论这种方法的PCM信号的帧同步问题。

实际信道中总是有噪声的,噪声会使传输的同步图像出现一个或若干个错误。因此,在同步图像识别的过程中,要允许有某些错误,以便减少漏同步。但是,这样做会使假同步概率增大,二者是矛盾的,只能折衷处理。下面我们将从理论上定量分析它们之间的复杂关系,并给出一套完整的数学表达式。

在下面的讨论中,假设数据源是二元的,取到每个符号的概率是相同的。还假设由这样的信源生成的二进信号是在无记忆的,对称信道中传输的。为了导出我们的结果,首先来回顾一下帧同步理论发展的历史。

在现有的许多文献和著作中,使用的帧同步计算公式基本上是由最早研究帧同步理论的 R. H. Barker 在 1953 年提出来的<sup>[1]</sup>。他得出的由纯随机数据产生虚假同步的概率公式为

$$P_f = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^E \binom{n}{k}; \quad (1)$$

在正确的同步位置上,检出同步图像的概率公式为

$$P_t = \sum_{k=0}^E \binom{n}{k} (1 - P_e)^{n-k} P_e^k, \quad (2)$$

其中, $n$ 表示同步图像长度, $E$ 表示容错数(或称门限), $P_e$ 表示误码率。(1)式只表示了

\* 1982年5月20日收到。

\*\* 国内一般称为“同步码”,但国外最普遍、历史最久的一种叫法为“Synchronization pattern”,又考虑到,近年来出现了“Two-Dimensional Synchronization pattern”,所以我们认为还是称为“同步图像”比较合适。

由  $n$  位随机数据, 当容错数为  $E$  时, 可能成为一个假同步图像的概率, 而没有考虑大于  $n$  的各种可能长度随机数据对虚假同步的影响. (2) 式只考虑了, 当容错数给定时, 在同步位置上, 检出同步图像的概率. 上述两个公式都没有在同步图像长度与帧长度之间建立起定量关系. 1962 年, 文献 [2] 从信息论的角度提出了在无错传输时, 二进数据帧长度与同步图像长度之间的近似关系式, 为  $n = [\log \cdot M]$ ,  $[\cdot]$  表示取整数. 但在这个公式中, 看不出噪声的影响. 1971 年, 文献 [3] 又提出了  $n = (1 + c) \log M$ ,  $M$  表示帧长度. 这后一公式只多加了一个修正量  $c$ , 作者认为  $c$  可以在 0—0.5 之间选取. 显然, 利用上述公式进行帧结构设计和同步性能分析只能是很粗的估算.

1973 年, 文献 [4] 证明了, 当同步图像的长度给定之后, 其结构对随机数据流中出现虚假同步图像的概率是有影响的. 他发现有相同前后缀的图像在半无限长随机数据中常常延迟出现. 本文将根据他的结论导出帧同步一次通过捕获概率公式.

## 二、建立公式

(一) 文献 [4] 的结论及其分析 在半无限长随机数据流中, 搜索到第一个给定的向量  $r$  的平均距离为

$$D(x) = 1 - n + L^n + \sum_{i=1}^{n-1} h_i L^i, \quad (L \geq 2, n \geq 1); \quad (3)$$

其中,  $n$  表示向量  $r = [r_1, r_2, \dots, r_n]$  的维数,  $L$  表示字母表中字母的个数. 在随机序列中, 每位上取到任何一个字母的概率都是  $L^{-1}$ . 他指出, 一个  $n$  维向量可分成具有相同前后缀的和不同前后缀的两类. 以下简称前者为共缀向量, 后者为非共缀向量.

向量的共缀指示为  $h_i (1 \leq i < n)$ , 其意义是: 如果  $[r_1, r_2, \dots, r_i]$  是  $r$  的共缀序列, 则  $h_i = 1$ , 否则  $h_i = 0$ . 如果  $h_i = 0$ , 就说  $r$  是非共缀向量. 以上就是文献 [4] 的主要结论. 为了引进他的结论, 特做如下分析.

对于二进序列  $L = 2$ , 设  $r$  有  $i$  重共缀, 即  $h_1 = h_2 = \dots = h_i = 1, (1 \leq i < n)$ , 由(3)式可知  $n$  维非共缀序列出现的平均距离为  $1 - n + 2^n$ , 故得归一化距离为

$$\frac{D(x)}{1 - n + L^n} = 1 + \frac{\sum_{j=1}^i 2^j}{1 - n + 2^n} = \frac{2(2^i - 1)}{1 - n + 2^n} + 1. \quad (4)$$

$n$  给定后,  $1 - n + 2^n$  就是一个常数. 为了找出共缀长度  $i$  与  $D(x)$  的关系, 可令上式等于 1.1, 因而得  $\frac{2(2^i - 1)}{1 - n + 2^n} = 0.1$ . 两边取对数化简后得

$$i = \left\lceil \frac{\log(21 - n + 2^n)}{\log 2} - 4.32 \right\rceil.$$

该式右边的  $[\cdot]$  表示  $i$  取整数. 通常  $2^n \gg n$ , 因此, 可进一步简化上式为

$$i = n - 5. \quad (5)$$

此式表明一个  $n$  维共缀向量, 只要其最大共缀指示  $h_i = 1$  中的  $i$  满足  $i \leq n - 5$ , 如  $n = 16$ ,  $i = 11$ ;  $n = 32$ ,  $i = 27$  时, 都能满足此条件. 这时, 它们在随机数据流中出现的平

均距离就不会超过等长度的非共缀向量平均距离的 0.1 倍. 只有当  $i$  非常接近于  $n$  时,  $D(x)$  才随着  $i$  的增加而迅速增大. 一般, 可设 (4) 式等于  $k$ , 求满足  $k$  条件的  $i$  值,  $k$  的取值范围是  $1 < k < \left[1 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{1 - n + 2^n}\right] \approx 2$ .

通常选用的同步图像码是一些文献上推荐的非共缀码, 如文献 [6] 推荐了 7—30 位长的所谓最佳同步图像码. 关于可做为同步图像的码字结构和特性, 这里不作介绍, 感兴趣的读者可以从文献 [5] 中找到许多有关参考文献. 实践表明, 当给定的  $E$  合理时 (比  $n$  小得多), 全部图像码都会满足  $i \leq n - 5$ , 即能满足小于 0.1 倍的距离差. 当忽略这 0.1 倍的距离差, 并设  $\frac{2^n - n + 1}{N} \gg n$ ,  $M \gg n$  ( $N$  表示有容错时, 全部图像码个数;  $M$  表示帧长度, 包括  $n$ ); 并忽略重叠区的异常影响和重叠图像时, 就可用普阿松分布来描述这些图像在随机数据流中的分布.

(二) 一次通过捕获概率 设容错数为  $E$ , 则共有

$$N = \sum_{k=0}^E \binom{n}{k}, \quad (0 \leq E < n) \quad (6)$$

个等价的同步图像. 每个同步图像出现的平均距离 (或时间) 可由 (3) 式准确求得. 如第  $s$  个图像出现的平均距离为  $D(x_s) = \sum_{i=0}^n h_{is} 2^i - 1$ , ( $h_0 = h_n = 1$ ,  $s = 1, 2, \dots, N$ ). 令  $T$  是观测到第一个同步图像的等待时间, 其分布函数  $F(t) = 0$ , 当  $t < 0$  时; 而当  $t \geq 0$  时, 则有  $F(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - P(\text{不在 } [0, t] \text{ 中出现图像}) = 1 - e^{-\lambda t}$ , 其中  $\lambda$  表示单位时间内观测到的同步图像的平均数. 这样, 当  $t > 0$  时,  $T$  的密度函数为

$$F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}. \quad (7)$$

根据指数分布的性质可知, 均值和方差分别为  $\mu = \frac{1}{\lambda}$  和  $\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$ .  $\frac{1}{\lambda}$  是第一次出现图像的平均等待时间. 令  $\frac{1}{\lambda_s}$  是第  $s$  个图像第一次出现的平均等待时间, 则  $\frac{1}{\lambda_s} = D(x_s)$ . 因此, 图像  $s$  第一次出现的时间在  $t$  之间的概率为

$$P_s(T_s \leq t) = \int_0^t \lambda_s e^{-\lambda_s x} dx = 1 - e^{-\lambda_s t}, \quad (8)$$

则第  $s$  个图像第一次出现的时间落在  $t$  之外的概率是

$$P_s(T_s > t) = e^{-\lambda_s t}. \quad (9)$$

当只考虑原图像 ( $E = 0$ ) 时, 在区间  $t$  内至少出现一个图像的概率可以由 (8) 式求得, 而不出现图像的概率可以由 (9) 式求得. 下面将导出由 (6) 式定义的  $N$  个等价图像出现的平均时间都不落在  $t$  内的概率, 并用  $P_0$  表示. 当忽略重叠区的特异性和重叠图像时, 可以近似认为这些同步图像的出现是彼此独立的, 所以有

$$\begin{aligned} P_0 &= P(T_1 > t, T_2 > t, \dots, T_N > t) \\ &= P_1(T_1 > t) P_2(T_2 > t) \cdots P_N(T_N > t) = \prod_{s=1}^N P_s(T_s > t) \end{aligned}$$

$$= \prod_{s=1}^N e^{-t\lambda_s} = e^{-t \sum_{s=1}^N \frac{1}{D(x_s)}}. \quad (10)$$

在区间  $t$  内至少出现一个假图像的概率为

$$P_F = 1 - P_0 = 1 - e^{-t \sum_{s=1}^N \frac{1}{D(x_s)}}. \quad (11)$$

对于长度为  $n$  的  $N$  个图像,我们总可以有

$$D(x_1) \leq D(x_2) \leq \dots \leq D(x_N),$$

其中  $D(x_i)$  表示非共缀图像出现的平均距离(至少原同步图像是其中之一),于是可得

$$P_0 = e^{-t \sum_{s=1}^N \frac{1}{D(x_s)}} \geq e^{-t \frac{N}{D(x_1)}} = e^{-t \frac{\sum_{k=0}^E \binom{n}{k}}{D(x_1)}}.$$

当这  $N$  个图像的结构满足  $i \leq n - 5$  时,可得近似式

$$P_0 = e^{-t \frac{\sum_{k=0}^E \binom{n}{k}}{D(x_1)}}. \quad (12)$$

上式可以作为  $N$  个等价的图像都不在  $t$  区间内出现的概率下界. 而至少有一个图像在  $t$  内出现的概率上界是

$$P_F = 1 - P_0. \quad (13)$$

(10) 式和 (11) 式与所使用的同步图像结构有关,为了使计算的结果更精确些,可利用它们,但是,对于通常的工程问题,利用 (12) 式和 (13) 式计算就完全可以满足要求. 由 (3) 式可知,对于二进随机数据中搜索到第一个非共缀图像的平均距离是  $D(x) = 2^n - n + 1$ ,

将它代入 (12) 式可得  $P_0 = e^{-t \frac{\sum_{k=0}^E \binom{n}{k}}{2^n - n + 1}}$ . 实际应用中常常满足条件  $2^n \gg n$ , 所以 (12) 式又可化成

$$P_0 = e^{-t \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^E \binom{n}{k}}; \quad (14)$$

而 (13) 式可化成

$$P_F = 1 - e^{-t \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^E \binom{n}{k}}. \quad (15)$$

图 1 给出了  $P_F$  与  $t$  之间的关系曲线. 从图中可以看出,当  $n$  给定之后,曲线随着  $E$  的增大而升高,虚假同步概率增大. 当  $E$  保持不变,改变  $n$  时,曲线随着  $n$  的增大而下降,虚假概率减小. 当  $t \rightarrow +\infty$  时,则  $P_F \rightarrow 1$ . 这表明当  $t$  足够大时,出现虚假同步概率几乎成为必然事件.

为了比较,再从贝努利实验的概率模型出发,用二项分布导出在区间  $t$  内不出现图像的概率公式,过程从略. 在忽略了重叠区的影响时,可导出如下公式

$$P'_0 = (1 - P_f)^t, \quad (t \gg n, P_f \ll 1); \quad (16)$$

其中  $P_f = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^E \binom{n}{k}$ .

表 1 给出了当  $t = 600$ ,  $E = 0$  和  $E = 1$  时, 对应两种不同长度  $n$  的同步图像, 由 (14) 式和 (16) 式计算的结果。可以看出, 这些结果非常接近。因此, 可以认为, 在通常所使用的同步图像长度范围内, (14) 式和 (16) 式是完全等价的。

考虑一帧数据, 帧长度为  $M$  (包括  $n$  在内), 最坏情况是从搜索开始, 到找到一个同步图像所需要的时间为  $M - 1$ , 帧同步图像识别器或算法第一次在  $M$  时刻输出一个同步指示的概率为

$$P_1 = P_0 P_t, \quad (17)$$

式中  $P_0$  为  $t < M$  时, 不出现假同步图像的概率, 可用 (10) 式表示;  $P_t$  为  $t = M$  时, 找到一个真图像的概率, 它可用 (2) 式来表示。因而得到一次通过捕获概率公式为

$$P_1 = P_0 P_t = \left[ e^{-M \sum_{s=1}^N \frac{1}{D(x_s)}} \right] \sum_{k=0}^E \binom{n}{k} (1 - P_e)^{n-k} P_e^k. \quad (18)$$

为了书写简单, 上式中的  $M - 1$ , 已用  $M$  代替, 式中的  $P_e$  表示线路总的误码率。用 (18) 式进行计算比较麻烦, 因为, 必须首先搞清楚  $N$  个等价同步图像中每个的结构, 分别计算出  $D(x_s)$ , ( $s = 1, 2, \dots, N$ ), 然后代入 (18) 式求出所需要的结果。用近似表达式 (14) 或 (16) 来代替 (10) 式作为 (18) 式的第一项, 这时可得到一次通过捕获概率公式

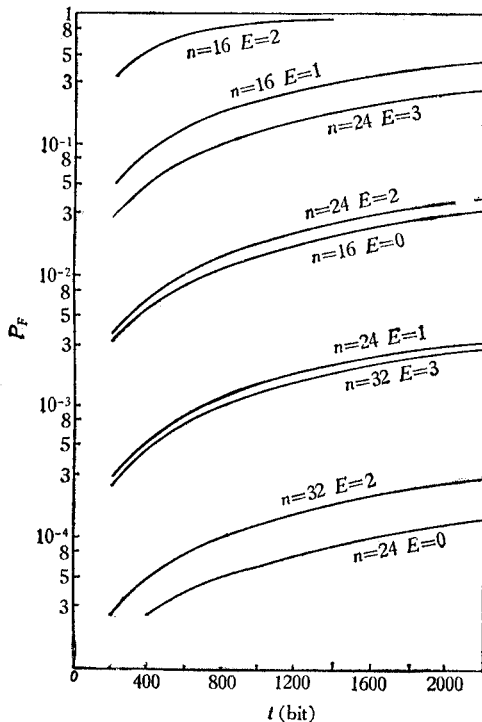


图 1 随机数据中至少产生一个图像的概率  
Fig. 1 Probability of one false pattern accepted at least in a random data stream

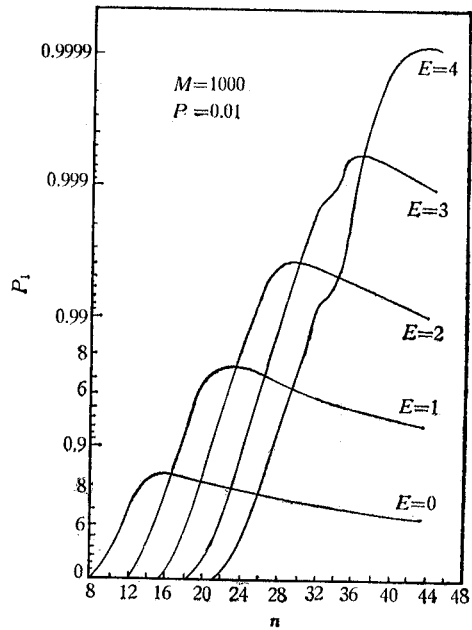


图 2 一次通过捕获概率  $P_1$  与  $n$  的函数关系,  $E$  为参变量  
Fig. 2 One-pass acquisition probability  $P_1$  as a function of  $n$  with  $E$  as parameter

表 1  $t = 600$  Tab. 1

$n$	$E$	(14) 式	(16) 式
16	0	0.9908865089	0.990886492
	1	0.8558675	0.8558503
32	0	0.99999986	0.99999988
	1	0.99999539	0.99999544

$$P_1 = \left[ e^{-M(\frac{1}{2})^n \sum_{k=0}^E \binom{n}{k}} \right] \sum_{k=0}^E \binom{n}{k} (1 - P_e)^{n-k} P_e^k \quad (19a)$$

和

$$P_1 = \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^n \sum_{k=0}^E \binom{n}{k} \right]^M \sum_{k=0}^E \binom{n}{k} (1 - P_e)^{n-k} P_e^k. \quad (19b)$$

在工程实践中, 常常用一次通过(即通过一整帧的时间)的正确捕获概率作为系统性能的估算标准。

作为一个例子, 设  $P_e = 0.01$ ,  $M = 1000$  时, 由 (19) 式计算的结果, 示于图 2. 它表示以  $E$  为参量时,  $P_1$  与  $n$  之间的关系曲线. 从图中可以看出, 这些曲线的峰值随着  $E$  的增加而逐渐向右移动, 而且一个比一个高. 可知为了提高一次通过捕获概率, 当  $M$  和  $P_e$  给定时, 总可以求得一个捕获概率极值  $P_{1\max}$ , 从而得到最佳的  $n$  和  $E$ . 当要求的一次通过捕获概率非常大时, 则必须增大  $n$  和  $E$ .

表 2  $P_e = 0.01$   $M = 1000$  Tab. 2

$E$	0	1	2	3	4
$n$	16	24	30	36	44
$P_{1\max}$	0.838	0.974	0.996	0.9994	0.9999
$\eta(\%)$	1.6	2.4	3.0	3.6	4.4

表 3  $M = 600$   $n = 16$  Tab. 3

$P_e \backslash E$	0	1	2	3
0.1	0.18	0.44	0.23	0.015
0.01	0.84	0.85	0.29	0.017
0.001	0.96	0.86	0.29	0.017
0.0001	0.989	0.86	0.29	0.017
0.00001	0.991	0.86	0.29	0.017

表 2 给出了一次通过捕获概率为最大时的传输图像所占用通道的的时间百分比, 记作  $\eta(\%)$ .

可以证明, 在突发干扰不是很严重的场合, 适当增长  $n$  和  $E$ , 并用长帧传输数据, 可以在不降低信道效率的条件下, 显著提高一次通过捕获概率. 从 (19a) 式可知  $M$  和  $2^n$  近似成正比. 因此, 当  $n$  足够长时,  $\eta$  可以任意小. 通常同步图像的长度可在 20—30 之间选取.

表 3 给出了帧格式为  $M = 600$ ,  $n = 16$  时; 不同  $P_c$  和  $E$  下的  $P_1$  值. 表中  $\square$  中的值, 表示  $P_1$  取最大值, 此时系统处于最佳工作状态. 从表中的数据可以发现,  $E$  的选择对系统性能影响极大.

(三)  **$M$  和  $n$  之间的最佳关系** 由图 2 和附录 I 的论证可知  $P_1$  存在一个极大值, 为了导出  $P_{1\max}$  时  $M$  和  $n$  的关系式, 记  $P_1$  为  $P_1(n, m')$ , 其中  $m'$  表示连续实变量, 由 (19a) 式可得

$$P_1(n+1, m') = \sum_{k=0}^E \binom{n+1}{k} (1-P_c)^{n-k+1} P_c^k \left[ e^{-m'(\frac{1}{2})^{n+1}} \sum_{k=0}^E \binom{n+1}{k} \right], \quad (20)$$

$$P_1(n, m') = \sum_{k=0}^E \binom{n}{k} (1-P_c)^{n-k} P_c^k \left[ e^{-m'(\frac{1}{2})^n} \sum_{k=0}^E \binom{n}{k} \right]. \quad (21)$$

令

$$\frac{P_1(n+1, m')}{P_1(n, m')} = 1. \quad (22)$$

因为,  $n$  只能取正整数, 所以, 上式一般不会准确等于 1. 但, 只要能找出最接近 1 的  $m'$  和  $n$  之间的关系就够了. 附录 I 给出了从 (22) 式导出 (23) 式

$$\left[ e^{+m'(\frac{1}{2})^{n+1}(\frac{n}{E})} \left[ 1 - \frac{\binom{n}{E} (1-P_c)^{n-E} P_c^{E+1}}{\sum_{k=0}^E \binom{n}{k} (1-P_c)^{n-k} P_c^k} \right] \right] = 1 \quad (23)$$

的详细过程. 满足 (23) 式的各个参数会使  $P_1$  取  $P_{1\max}$ . 在应用时,  $m'$  用  $M$  代替. 下面按  $E = 0, 1, 2, 3$  的 4 种情况进一步简化 (23) 式.

(1) 当  $E = 0$  时, (23) 式可简化成

$$\left[ e^{m'(\frac{1}{2})^{n+1}} (1-P_c) - 1 = 0. \quad (24)$$

(2) 当  $E = 1$  时, 可以简化成

$$\left[ e^{m'(\frac{1}{2})^{n+1}n} \left[ 1 - \frac{nP_c^2}{1+(n-1)P_c} \right] - 1 = 0. \quad (25)$$

(3) 当  $E = 2$  时, 可以简化成

$$\left[ e^{m'(\frac{1}{2})^{n+1} \frac{n(n-1)}{2}} \left[ 1 - \frac{P_c^2 \left[ \frac{n(n-1)}{2} \right]}{1 + P_c(n-2) + P_c^2 \left[ 1 - n + \frac{n(n-1)}{2} \right]} \right] - 1 = 0. \quad (26)$$

(4) 当  $E = 3$  时,有

$$\begin{aligned}
 & \left[ e^{m'(\frac{1}{2})^{n+1} \frac{n(n-1)(n-2)}{6}} \left[ 1 - \left( \frac{n(n-1)(n-2)}{6} P_c^3 \right) / \left( (1-P_c)^3 + n(1-P_c)^2 P_c \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. + \frac{n(n-1)}{2} (1-P_c) P_c^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} P_c^3 \right) \right] - 1 \right. \\
 = & \left[ e^{m'(\frac{1}{2})^{n+1} \frac{n(n-1)(n-2)}{6}} \left[ 1 - \left( P_c^3 \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \right) / \left( 1 + (n-3)P_c \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left[ 3 - 2n + \frac{n(n-1)}{2} \right] P_c^2 + \left[ n - 1 - \frac{n(n-1)}{2} \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \right] P_c^3 \right] - 1 = 0. \tag{27}
 \end{aligned}$$

利用 (23) 式进行帧结构设计的过程如下:

设  $P_c$  是给定的参数,通常  $P_c$  按可能的最坏情况选取. 然后令  $E = 0$ , 并按任务要求给出适当的  $M$  值代替  $m'$ . 由 (24) 式求得  $n'$  值,取  $n'$  的整数为  $n$ . 再由 (19) 式就可求得  $P_{1\max}$ . 如果不满足要求,则再令  $E = 1$ , 并选  $n$  的估值  $n'$  代入 (25) 式,求得  $m'$ . 用  $\log_2 \frac{M}{m'}$  来修正  $n'$ , 有  $n = \left[ n' + \log_2 \frac{M}{m'} \right]$ ,  $[\cdot]$  表示取整数. 将所得参数代入 (19) 式,求出  $P_{1\max}$ . 如果仍不满足要求,再取  $E = 2$ , 重复上述过程,直到得到一组能满足给定的最大一次通过捕获概率要求的参数为止. 下面用具体例子来说明上述设计过程.

设  $M = 512$ ,  $P_c = 0.01$ , 要求  $P_1$  的最大可能值不小于 99.5%. 求满足最佳设计要求的  $E$  和  $n$ .

先由 (24) 式求  $n$ , 得  $n = 15$ . 由 (19) 式得到  $P_{1\max} = 0.8736$ , 小于 0.995. 再由

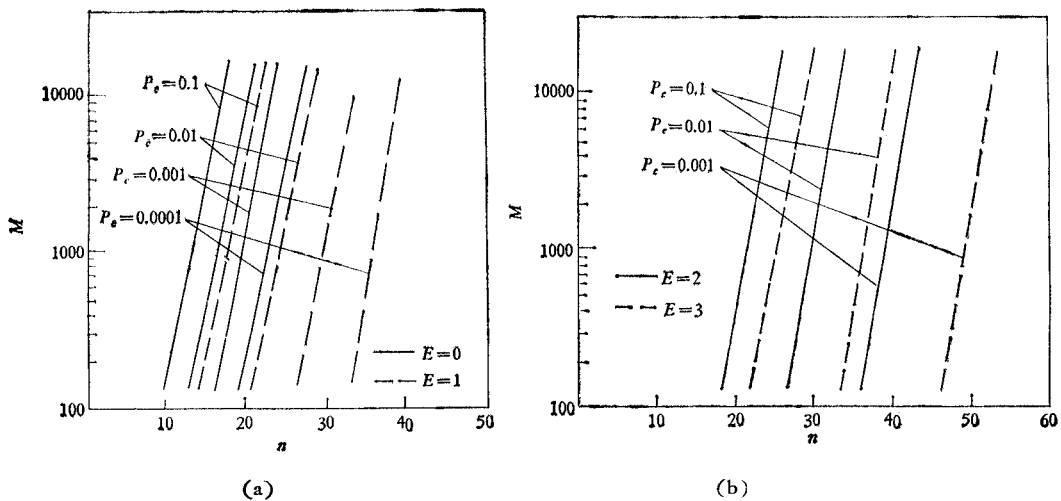


图 3  $P_1$  取最大值时,  $M$  和  $n$  之间的函数关系以  $P_c$  和  $E$  为参变量

Fig. 3 Frame length  $M$  as function of  $n$  for  $P_{1\max}$  with  $P_c$  and  $E$  as parameters



(25) 式求  $n$ , 设  $n' = 20$ , 由 (25) 式得  $m' = 176$ , 则  $\log_2 \frac{M}{m'} = \log_2 \frac{512}{176} = 2$ , 得  $n = 20 + 2 = 22$ . 由 (19) 式得  $P_{1\max} = 0.9731 < 0.995$ . 由 (26) 式求  $n$  值, 设  $n' = 40$ , 由 (26) 式得  $m' = 1512697$ ,  $n$  为  $n = n' + \log_2 \frac{512}{1512697} = 40 - 11.52 \approx 29$ , 将  $n = 29$  代入 (19) 式, 可得  $P_{1\max} = 0.997 > 0.995$ , 满足要求, 设计结束.

图 3 给出了在  $P_{1\max}$  下, 以  $P_e$  和  $E$  为参量时,  $M$  与  $n$  之间的最佳关系. 在系统设计时, 首先选择适当的  $n$  或  $M$  值, 然后从图中可以找出  $M$  或  $n$ . 再根据不同的  $E$ , 由 (19) 式求得  $P_{1\max}$ . 使用图 3 给出的关系曲线, 可以使系统设计计算大大简化. 表 2 中给出的  $n$  值也可以从图 3 中的关系曲线上求得.

### 三、结 束 语

如果对信道噪声能有一个初步的估值, 即知道误码率的粗值; 便可按本文给出的一次通过捕获概率公式, 求得满足最佳关系的  $M$ ,  $n$  和  $E$ ; 从而给出最佳帧格式, 使系统有可能处于最佳的或准最佳的同步工作状态. 此外, 适当地使用长帧和长同步图像, 以及适当地增加容错个数, 在不降低信道效率的基础上, 可以大大提高同步捕获概率.

本文在写作过程中得到黄明亚、孙惠中同志的很多帮助, 还得到一些领导同志的支持, 在此一并表示感谢.

### 附 录 I

为了论证  $P_1(n, m)$  在  $E, P_e$  一定时, 有唯一极大值, 记

$$y = \frac{P_1(n+1, m')}{P_1(n, m')} = \frac{\left[ e^{-m'(\frac{1}{2})^{n+1}} \sum_{k=0}^E \binom{n+1}{k} \right] \left[ \sum_{k=0}^E \binom{n+1}{k} (1-P_e)^{n-k+1} P_e^k \right]}{\left[ e^{-m'(\frac{1}{2})^n} \sum_{k=0}^E \binom{n}{k} \right] \left[ \sum_{k=0}^E \binom{n}{k} (1-P_e)^{n-k} P_e^k \right]}$$

$$= \frac{[f_{n+1}][g_{n+1}]}{[f_n][g_n]} \quad (\text{I-1})$$

(I-1) 式中的第一个因子用  $F$  表示有

$$F = \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{e^{-m'(\frac{1}{2})^{n+1}} \sum_{k=0}^E \binom{n+1}{k}}{e^{-m'(\frac{1}{2})^n} \sum_{k=0}^E \binom{n}{k}} = e^{m'(\frac{1}{2})^n \left[ \sum_{k=0}^E \binom{n}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^E \binom{n+1}{k} \right]}$$

$$= e^{m'(\frac{1}{2})^n \left[ \sum_{k=0}^E \binom{n}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^E \binom{n-1}{k-1} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^E \binom{n}{k} \right]} = e^{m'(\frac{1}{2})^{n+1} \left[ \sum_{k=0}^E \binom{n}{k} - \sum_{k=1}^E \binom{n-1}{k-1} \right]}$$

$$= e^{m'(\frac{1}{2})^{n+1} \binom{n}{E}} = e^Z \quad (\text{I-2})$$

因为  $Z > 0$ , ( $m' > 0$ ), 所以  $F > 1$ , 可知  $f_n$  递增. 当  $n=1$ , 有  $F = e^{\frac{m'}{4} \binom{1}{E}}$ , ( $E=0, 1$ ).

又因为  $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \binom{n}{E} = \frac{n(n-1)\cdots(n-E+1)}{2^{n+1}E!} < \frac{n^E}{2^{n+1}}$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^E}{2^{n+1}} = 0$  (用罗彼塔法则), 所以有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F = 1$ . 可知  $f_n$  是  $n$  的单调递增函数. 下面证明  $f_n$  有界.  $\left(\frac{1}{2}\right)^n \times \sum_{k=0}^E \binom{n}{k}$  的通项为  $\left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} < \frac{n^k}{2^n}$ . 因为  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^k}{2^n} = 0$ , 得  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \sum_{k=0}^E \binom{n}{k} = 0$  (有限项之和仍为零), 所以有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = 1$ . 而当  $n = 1$  时,  $e^{-m'(\frac{1}{2}) \sum_{k=0}^E \binom{1}{k}}$ , ( $E = 0, 1$ ). 显然有  $\lim_{m' \rightarrow +\infty} f_n = 0$ . 工程中  $M$  一般取得较大 ( $M = 1000$  左右), 因此得出结论:  $f_n$  是一个单调递增的正值函数, 下界为 0, 上界为 1.

(I-1) 式中的第二个因子用  $G$  来代表有

$$\begin{aligned} G &= \frac{g_{n+1}}{g_n} = \frac{\sum_{k=0}^E \binom{n+1}{k} (1-P_e)^{n-k+1} P_e^k}{\sum_{k=0}^E \binom{n}{k} (1-P_e)^{n-k} P_e^k} = \frac{\sum_{k=0}^E \left[ \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] (1-P_e)^{n-k+1} P_e^k}{\sum_{k=0}^E \binom{n}{k} (1-P_e)^{n-k} P_e^k} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^E \binom{n}{k} (1-P_e)^{n-k+1} P_e^k + \sum_{k=1}^E \binom{n}{k-1} (1-P_e)^{n-k+1} P_e^k}{\sum_{k=0}^E \binom{n}{k} (1-P_e)^{n-k} P_e^k} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^E \binom{n}{k} (1-P_e)^{n-k} P_e^k - P_e \left[ \sum_{k=0}^E \binom{n}{k} (1-P_e)^{n-k} P_e^k \right] + \sum_{k=1}^E \binom{n}{k-1} (1-P_e)^{n-k+1} P_e^k}{\sum_{k=0}^E \binom{n}{k} (1-P_e)^{n-k} P_e^k} \\ &= 1 + \frac{\sum_{k=1}^E \binom{n}{k-1} (1-P_e)^{n-k+1} P_e^k - P_e \left[ \sum_{k=0}^E \binom{n}{k} (1-P_e)^{n-k} P_e^k \right]}{\sum_{k=0}^E \binom{n}{k} (1-P_e)^{n-k} P_e^k}. \end{aligned}$$

$$\text{记 } \alpha = \sum_{k=1}^E \binom{n}{k-1} (1-P_e)^{n-k+1} P_e^k = (1-P_e)^n P_e + n(1-P_e)^{n-1} P_e^2 + \frac{n(n-1)}{2} (1-P_e)^{n-2} P_e^3 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-E+2)}{(E-1)!} (1-P_e)^{n-E+1} P_e^E,$$

$$\begin{aligned} \text{记 } \beta &= P_e \sum_{k=0}^E \binom{n}{k} (1-P_e)^{n-k} P_e^k = P_e \left[ (1-P_e)^n + n(1-P_e)^{n-1} P_e + \cdots \right. \\ &\quad \left. + \frac{n(n-1)\cdots(n-E+1)}{E!} (1-P_e)^{n-E} P_e^E \right] = (1-P_e)^n P_e \\ &\quad + n(1-P_e)^{n-1} P_e^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-E+2)}{(E-1)!} (1-P_e)^{n-E+1} P_e^E \\ &\quad + \frac{n(n-1)\cdots(n-E+1)}{E!} (1-P_e)^{n-E} P_e^{E+1}, \end{aligned}$$

$\alpha - \beta = -\binom{n}{E}(1 - P_e)^{n - EP_e^{E+1}}$ , 所以有

$$G = 1 - \frac{\left[\binom{n}{E}(1 - P_e)^{n - EP_e^E}\right] P_e}{\sum_{k=0}^E \binom{n}{k} (1 - P_e)^{n - kP_e^k}} \quad (I-3)$$

因为  $0 < \left[\binom{n}{E}(1 - P_e)^{n - EP_e^E}\right] \leq \left[\sum_{k=0}^E \binom{n}{k} (1 - P_e)^{n - kP_e^k}\right] \leq 1$  和  $0 < P_e < 1$ , 所以有  $0 < G < 1$ . 因此可知  $g_n$  是一个单调递减的正值函数. 下面证明  $g_n$  是有界的.

$g_n$  的通项为  $\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} (1 - P_e)^{n - kP_e^k} < \frac{n^k(1 - P_e)^{n - kP_e^k}}{k!} < n^k(1 - P_e)^{n - k}$ .

因  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k(1 - P_e)^{n - k} = 0$  (用罗彼塔法则), 可知  $g_n$  的下界为零. 当  $n = 1$  时,

$$g_n = \begin{cases} 1 - P_e & (E = 0), \\ 1 & (E = 1). \end{cases}$$

从而可得出结论,  $g_n$  是单调递减的正值函数, 下界为零, 上界为  $(1 - P_e)$  (当  $E = 0$  时) 或为 1 (当  $E = 1$  时).

通过上面对  $f_n$  和  $g_n$  的分析可知,  $P_1(n, m') = f_n \cdot g_n$  也是一个正值函数, 并有唯一极大值, 且不超过 1, 这正好符合概率规律. 下面找出  $P_1$  取极值时,  $n$  与  $m'$  之间的函数关系, 令

$$Y = \frac{P(n + 1, m')}{P(n, m')} = 1 \quad (\text{近似等于 } 1), \quad (I-4)$$

可得

$$Y = F \cdot G = \left[ e^{m'(\frac{1}{2})^{n+1}(\frac{n}{E})} \right] \left[ 1 - \frac{\binom{n}{E}(1 - P_e)^{n - EP_e^{E+1}}}{\sum_{k=0}^E \binom{n}{k} (1 - P_e)^{n - kP_e^k}} \right] = 1. \quad (I-5)$$

给定不同的  $E$  值, 可以从 (I-5) 式求得对应的  $P_{1\max}$ . 从实践中已证实了这一结论是正确的.

### 参 考 文 献

- [1] R. H. Barker, Group Synchronizing of Binary Digital Systems in Communication Theory, W. Jackson, Ed., New York, Academic Butter Worth, 1953.
- [2] J. L. Phillips and G. E. Goode, Correlation Detection and Sequential Testing for PCM Group Synchronization, Proc. National Telemetry Conference 1962, paper 5-4.
- [3] P. E. Mallory, Method of Frame Sync Analysis, Proc. National Telemetry Conference 1971, pp. 264-269.
- [4] P. T. Nielsen, *IEEE Trans. on IT*, **IT-19** (1973), 702.
- [5] R. A. Scholtz, *IEEE Trans. on COM*, **COM-28** (1980), 1024.
- [6] J. L. Maury and F. J. Styles, Development of Optimum Frame Synchronization Codes for Goddard Space Flight Center PCM Telemetry Standards, Proc. 1964 Nat Telemetry Conference paper 3-1.

## ONE-PASS ACQUISITION PROBABILITY FOR FRAME SYNCHRONIZATION

Sui Houtang

*(Space Science and Technology Center, Academia Sinica)*

The theory of binary digital frame synchronization is discussed. The effect of random data on frame synchronization is introduced. The one-pass acquisition probability expression which is related with the pattern length and construction, frame length, bit error rate, decision threshold is obtained. Finally the method of design about optimal frame format is given and the relation between efficiency of channel and acquisition probability is described.