第11卷 第6期 电子科学学刊 Vol. 11, No. 6
1989年11月 JOURNAL OF ELECTRONICS Nov., 1989

电磁辐射过程中的能量守恒关系* **

宋文淼
（中国科学院电子学研究所，北京）

摘要 本文严格证明了任意截面波导内，由电子注电流激起电磁场的过程中的能量守恒关系，改正了作者在文章[1]中的一些错误；并把它推广到一端短路的波导系统. 这一结果说明了能量守恒是麦克斯韦方程组的固有性质.

关键词 电磁辐射；并矢格林函数

1. 引言

电子注在各种电磁系统中的辐射理论是所有电真空器件的理论基础. 在文章[1]中提出了直接应用并矢格林函数的方法来求电子注对波导的激励，而且证明了这种激励本身就满足能量守恒关系. 但该文中有一些错误，本文对此作了修正，并把它推广到更一般的情况. 由于这里所用的并矢格林函数是直接从麦克斯韦方程组推导出来的[2,3]. 所以这一工作实际上就是证明了麦克斯韦方程组本身的能量守恒关系.

2. 波导内辐射过程中的能量守恒关系

文章[1]中已经证明对任意截面波导系统，其电场为

$$E(R)=\sum_{m,n}\frac{-\omega\mu_0}{\beta^2_{mn}\cdot 2\iint_s |F_{mn}|^2 ds}F_{mn}(x,y)$$

$$\times\iiint_v F_{mn}(x',y')e^{i\beta_{mn}|z-z'|}\cdot J(R')dv' \tag{1}$$

其中，$\beta^2_{mn}=k^2-\tau^2_{mn}$. F_{mn} 为横向本征模，τ_{mn} 为对应的本征值. 根据电磁理论，波导中 τ_{mn} 模的行波功率流可表示为群速乘单位距离上的贮能，即:

$$P_{mn}=\frac{d\omega}{d\beta_{mn}}\cdot\frac{1}{2}\iint_s \varepsilon_0|F_{mn}|^2 ds \tag{2}$$

按文章[1]的方法可得:

$$E(R)=\sum_{mn}\frac{-1}{4P_{mn}}F_{mn}(x,y)$$

$$\times\iiint_v F(x,y)e^{i\beta_{mn}|z-z'|}\cdot J(R')dv' \tag{3}$$

注意(2)和(3)式和文章[1]中对应的公式相比，多了一个系数1/2. 这是由于文章[1]中

* 1988年7月14日收到，1988年11月8日修改定稿.
** 国家自然科学基金资助项目

贮能少写了系数 1/2。这样并矢格林函数就可改写成：

$$\bar{G}(R, R') = \sum_{mn} -\frac{1}{4P_{mn}} F_{mn}(x,y) F_{mn}(x',y') e^{i\beta_{mn}|z-z'|} \tag{4}$$

同样，(4)式和文章[1]相比也差了系数 1/2。为了简化起见，只考虑传播模式，对于所有的传播模式由于它们之间的正交性，我们只讨论其中一个模式。假定源区的范围为 $z'_{\min}$ 到 $z'_{\max}$，为了计算直波的辐射功率，只需考虑 $z > z'_{\max}$，则有：

$$\begin{aligned} E(x,y)e^{i\beta z} = & -\frac{1}{2P} F(x,y) e^{i\beta z} \\ & \times \iiint_v \left\{ \frac{1}{2} F(x', y') e^{-i\beta z'} \cdot J(R') \right\} dv' \end{aligned} \tag{5}$$

这样，直波功率流为：

$$\begin{aligned} P_{tf} &= \frac{1}{2} \frac{d\omega}{d\beta} \iint_s \varepsilon_0 |E(x, y)|^2 ds \\ &= \frac{1}{P} \left| \frac{1}{4} \iiint_{v'} F(x', y') e^{-i\beta z'} \cdot J(R') dv' \right|^2 \end{aligned} \tag{6}$$

这里省略了下标 mn，同样可得返波功率为：

$$P_{bf} = \frac{1}{P} \left| \frac{1}{4} \iiint_{v'} F(x', y') e^{i\beta z'} \cdot J(R) dv' \right|^2 \tag{7}$$

为了计算电流对场所作的功，必须考虑源区的场，这一源区场只考虑旋量场：

$$\begin{aligned} E(R) = & -\frac{1}{2P} F(x,y) e^{i\beta z} \iint_{s'} ds' \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{2} F(x', y') e^{-i\beta z'} \cdot J(R') dz' \\ & -\frac{1}{2P} F(x,y) e^{-i\beta z} \iint_{s'} ds' \int_{z}^{\infty} \frac{1}{2} F(x', y') e^{i\beta z} \cdot J(R') dz' \end{aligned} \tag{8}$$

由此可以看出源区场包括直波和返波两部份，电流对场作的总的功率为：

$$P_b = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \iiint_v E(R) \cdot J(R) dv \right\} \tag{9}$$

其中电流对直波场所作的功为：

$$\begin{aligned} P_{bf} = & \frac{1}{2P} \operatorname{Re} \left\{ \iint_s F(x,y) ds \iint_s F(x', y') ds' \right. \\ & \left. \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{i\beta z} \cdot J^*(R) \left[\int_{-\infty}^{z} \frac{1}{2} e^{-i\beta z'} \cdot J(R') dz' \right] dz \right\} \end{aligned} \tag{10}$$

$F(x,y)$ 为实函数，所以只需对 z 的积分取实部，取

$$S = \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} e^{i\beta z} J(R) \left[\int_{-\infty}^{z} \frac{1}{2} e^{-i\beta z'} J(R') dz' \right] dz \right\} \tag{11}$$

并令 $f(R') = \frac{1}{2} e^{-i\beta z'} J(R')$ 和 $g(R) = \int_{-\infty}^{z} f(R') dz'$，则 $g'(R) = f(R)$。代入(11)

式得：

$$S = \mathrm{Re}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} g^{*\prime}(\boldsymbol{R})g(\boldsymbol{R})dz\right\} = \left\{\frac{1}{2}\ |g(\boldsymbol{R})|^2\right\}_{-\infty}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\beta z'}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')dz'\right|^2 \tag{12}$$

代入(10)式得：

$$P_{bf} = \frac{1}{P}\left|\frac{1}{4}\iiint_v \boldsymbol{F}(x', y')e^{-i\beta z'}\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')dv'\right|^2 \tag{13}$$

这就证明了直波的能量守恒，同样可证明对返波的能量守恒关系。

3. 一端短路的波导中的能量守恒关系

现在考虑 $z=0$ 处短路的任意截面波导的情况，这时用功率流归一化的并矢格林函数为：

$$\bar{G}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}') = \sum_{m,n}\frac{i}{2P_{mn}}\boldsymbol{F}_{mn}(x,y)\boldsymbol{F}_{mn}(x', y')$$

$$\times\begin{cases} e^{-i\beta_{mn}z}\sin\beta_{mn}z' & z > z' \\ e^{-i\beta_{mn}z'}\sin\beta_{mn}z & 0\leqslant z\leqslant z' \end{cases} \tag{14}$$

这里 P_{mn} 和 β_{mn} 的定义同上. 同样只考虑单一的传播模式，这时电场可以表示为：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{E}(x, y)e^{-i\beta z} = \frac{i}{2P}\boldsymbol{F}(x, y)e^{-i\beta z}$$

$$\times\iiint_v \boldsymbol{F}(x', y')\sin\beta z'\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')dv', \quad z > z'_{\max} \tag{15}$$

这里全部的辐射功率都是直波功率，为：

$$P_f = \frac{1}{2}\frac{d\omega}{d\beta}\iint_s \varepsilon_0|\boldsymbol{E}(x, y)|^2 ds$$

$$= \frac{1}{P}\left|\frac{1}{2}\iiint_v \boldsymbol{F}(x, y)\sin\beta z'\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')dv\right|^2 \tag{16}$$

为了计算电流对场所作的功，必须写出源区场：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}) = \frac{i}{2P}\left\{\boldsymbol{F}(x, y)e^{-i\beta z}\iint_s ds'\int_0^z \boldsymbol{F}(x', y')\sin\beta z'\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')dz'\right.$$

$$\left.+\boldsymbol{F}(x, y)\sin\beta z\iint_s ds'\int_z^{\infty}\boldsymbol{F}(x', y')e^{-i\beta z'}\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R})dz'\right\} \tag{17}$$

电流 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R})$ 对场所作的功为：

$$P_b = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{i}{2P}\iint_s ds\int_0^{\infty}\boldsymbol{F}(x, y)e^{-i\beta z}\cdot\boldsymbol{J}^*(\boldsymbol{R})\right.$$

$$\times\left[\iint_s ds'\int_0^z \boldsymbol{F}(x', y')\sin\beta z'\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')dz'\right]dz$$

$$+\frac{i}{2P}\iint_{s} ds\int_{0}^{\infty} \boldsymbol{F}(x,y)\sin\beta z\cdot \boldsymbol{J}^{*}(\boldsymbol{R})$$

$$\times\left[\iint_{s'} ds'\int_{z}^{\infty} \boldsymbol{F}(x',y')e^{-i\beta z}\cdot \boldsymbol{J}(\boldsymbol{R}')dz'\right]dz\Big\} \tag{18}$$

为了简化运算，令 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{J}_{t}(x,y)J_{z}(z)$，其中 $\boldsymbol{J}_{t}$ 是实矢量．上式简化为：

$$P_{b}=-\frac{1}{4P}\left[\iint_{s'} \boldsymbol{F}(x',y')\cdot \boldsymbol{J}_{t}(x',y')ds'\right]^{2}$$

$$\cdot \operatorname{Re}\Big\{i\int_{0}^{\infty}[e^{i\beta z}J_{z}(z)]^{*}\int_{0}^{z}\sin\beta z'\cdot J_{z}(z')dz'dz$$

$$+i\int_{0}^{\infty}[\sin\beta z\cdot J_{z}(z)]^{*}\int_{0}^{\infty}e^{-i\beta z}J_{z}(z')dz'dz\Big\} \tag{19}$$

先计算 Re{—} 部份：先把 sin 函数化为指数．利用和推导(12)式所用的方法进行化简，最后再还原为三角函数得：

$$\operatorname{Re}\{-\}=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\Big\{\int_{0}^{\infty}(e^{i\beta z}J_{z}(z))^{*}\int_{0}^{z}(e^{i\beta z'}-e^{-i\beta z'})J_{z}(z')dz'dz$$

$$-\int_{0}^{\infty}[(e^{i\beta z}-e^{-i\beta z})J_{z}(z)]^{*}\int_{z}^{\infty}e^{-i\beta z'}J_{z}(z')dz'dz\Big\}$$

$$=-\frac{1}{4}\left\{\left|\int_{0}^{\infty}(e^{i\beta z}-e^{-i\beta z})J_{z}(z)dz\right|^{2}\right\}$$

$$=-\left|\int_{0}^{\infty}\sin\beta z\cdot J_{z}(z)dz\right|^{2} \tag{20}$$

把上式代入(19)式得：

$$P_{b}=\frac{1}{4P}\left|\iiint_{v}\boldsymbol{F}(x,y)\sin\beta z\cdot \boldsymbol{J}(\boldsymbol{R})dv\right|^{2}$$

$$=\frac{1}{P}\left|\frac{1}{2}\iiint_{v}\boldsymbol{F}(x,y)\sin\beta z\cdot \boldsymbol{J}(\boldsymbol{R})dv\right|^{2} \tag{21}$$

这就证明了一端短路的波导系统中，电流辐射过程中的能量守恒关系

4. 讨论和小结

我们虽只讨论了单一传播模式的情况，从模式的正交性不难证明对多模情况，如直波和返波的情况一样，分别满足能量守恒关系．对于衰减模的情况和谐振腔中的场类似，电场和电流是驻波形式且相互在时间上有 $\pi/2$ 的相位差，所以电流对电场没有实功率部份．但是我们也可以讨论它的虚功率部份．虚功率的守恒反映了半个周期内电流对场所作的功正好等于场的最大贮能，而后半周期则相反．

利用本文的基本方法和方程可以精确地计算电子器件中的激励问题，也可以发现以往电子器件相互作用理论中[4-6]，虽然也有以能量守恒作为互作用的依据，但是没有考虑电子注和波相互作用的特殊性．所以大都是近似的，特别对激励波的相位会带来一定的误

差，利用这一精确理论可望得到更精确的结果.

参　考　文　献

[1] 宋文淼，电子科学学刊，9(1987)1，11—16.
[2] C. T. Tai, Dyadic Green's Function on Electromagnetic Theory, Intext Educational Publishers, Scranton, Pa. 1971.
[3] 宋文淼，电子科学学刊，8(1986)1，8—13.
[4] G. S. Kino et al., Sixth Int. Conf. on Microwave and Optical Generation and Amplification, pp. 49—53, 1966. 5.
[5] J. R. Vaughan et al., *IEEE Trans. on ED*, ED-22(1975), 880—886.
[6] D. J. Connolly, *IEEE Trans. on ED*, ED-24(1977), 27—31.

ON ENERGY CONSERVATION IN ELECTROMAGNETIC RADIATION PROCESS

Song Wenmiao
(Institute of Electronics, Academia Sinica, Beijing)

Abstract The energy conservation in the radiation process by electron beam in a waveguide with arbitrary cross-section is proved. Some mistakes in Ref. [1] by myself are corrected. And the results are extended to the waveguide system with one shorted end. This result explains that the energy conservation is the intrinsic attributes of the Maxwell's equation set.

Key words Electromagnetic radiation; Dyadic Green's function