

## 基于稀疏采样阵列优化的 APG-MUSIC 算法

宋 虎<sup>①②</sup> 蒋迺倜<sup>②</sup> 刘 溶<sup>②</sup> 李洪涛<sup>\*①</sup>

<sup>①</sup>(南京理工大学电子工程与光电技术学院 南京 210094)

<sup>②</sup>(中国船舶重工集团公司南京船舶雷达研究所 南京 210000)

**摘要:** 针对稀疏阵列下 2 维波达方向(DOA)估计问题, 该文提出一种基于稀疏采样阵列优化的加速逼近梯度(APG)算法与多重信号分类(MUSIC)算法相结合的 2D-DOA 估计方法。首先, 建立稀疏阵列下的 2D-DOA 估计信号模型, 并证明其具备低秩特征, 满足零空间性质(NSP)。其次, 为提高稀疏阵列下矩阵填充方法重构接收信号矩阵性能和以此为基础的 2D-DOA 估计精度, 提出基于遗传算法(GA)的稀疏采样阵列优化方法。最后, 将 APG 和 MUSIC 算法相结合, 在重构完整平面阵列接收信号矩阵的基础上完成 2 维波达方向估计。计算机仿真结果表明, 该方法在保证 2 维波达方向估计精度前提下, 大幅提高阵元利用率, 有效降低空间谱平均旁瓣, 与常规 2D-DOA 估计方法相比具有优势。

**关键词:** 稀疏采样阵列优化; 矩阵填充; 2 维波达方向估计; 遗传算法

**中图分类号:** TN911.7

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1009-5896(2018)06-1390-07

**DOI:** 10.11999/JEIT170807

## APG-MUSIC Algorithm Based on Sparse Sampling Array Optimization

SONG Hu<sup>①②</sup> JIANG Naiti<sup>②</sup> LIU Rong<sup>②</sup> LI Hongtao<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(School of Electronic and Optical Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

<sup>②</sup>(Nanjing Marine Radar Institute, China Shipbuilding Industry Group Company, Nanjing 210000, China)

**Abstract:** A novel Two Dimension Direction Of Arrive (2D-DOA) estimation method based on sparse sampling array optimization is proposed, which is combined with Accelerated Proximal Gradient (APG) and Multiple Signal Classification (MUSIC). First, a 2D-DOA estimation signal model for sparse array is established, and its low rank feature and Null Space Property (NSP) are analyzed. Then, a sparse sampling array optimization method based on Genetic Algorithm (GA) is studied to enhance the performance of Matrix Completion (MC) and DOA. Finally, APG and MUSIC are employed to reconstruct the received signal matrix and estimate the direction of wave arrived, respectively. Computer simulation results show that the proposed method improves the utilization rate of array and reduces the average side lobe of spatial spectrum effectively, compared with the conventional 2D-DOA methods.

**Key words:** Sparse sampling array optimization; Matrix Completion (MC); Two-Dimension DOA (2D-DOA); Genetic Algorithm (GA)

### 1 引言

信号波达方向(Direction Of Arrival, DOA)估计是阵列信号处理领域研究重点<sup>[1,2]</sup>, 广泛应用于协同通信、辐射源定位跟踪以及信号分选识别等方面, 为战场态势感知、作战任务规划和雷达资源调度提

供重要支撑。近年来, 随着新型作战样式不断发展和电磁环境日益复杂多变对探测系统要求的不断提高, 波达方向估计正面临着高精度、高分辨率和高稳健性等方面的迫切要求<sup>[3]</sup>。针对这一趋势, 2 维波达方向估计(2D-DOA)由于能更精细地划分空间, 更准确地描述入射信号空间特征, 不易受杂波和噪声等无源干扰影响, 引起了广大学者的兴趣, 并涌现出大量 2D-DOA 估计方法<sup>[4-7]</sup>。

矩阵填充(Matrix Completion, MC)<sup>[8-12]</sup>是由压缩感知(Compressed Sensing, CS)<sup>[13]</sup>衍生的一项数据重构理论, 广泛应用于图像处理, 协同滤波、系统识别、频谱感知等众多领域。针对低秩矩阵,

收稿日期: 2017-08-14; 改回日期: 2018-01-22; 网络出版: 2018-03-15

\*通信作者: 李洪涛 liht@njjust.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(61401204), 中国博士后科学基金项目(2016M601813), 江苏省科技计划支撑类项目(BY2015004-03)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61401204), The Postdoctoral Science Foundation (2016M601813), The Science and Technology Project of Jiangsu Province (BY2015004-03)

该理论可将秩最小问题转化为核范数优化问题，以较大概率对观测矩阵中缺失数据补全，重构完整矩阵。雷达应用中，矩阵填充理论的引入将大幅降低采样数、传输量、存储量以及处理成本，在快速算法和准确重构方面取得了大量研究成果，显示出巨大研究价值和广阔应用前景<sup>[8]</sup>。

相比于 L 型、V 型、T 型以及十字型阵列，利用平面阵列进行 2 维 DOA(Two Dimension DOA, 2D-DOA)估计具有旁瓣低，对无源/有源干扰鲁棒性优等显著优势，但也存在天线阵面规模大，采样设备复杂，软硬件设计成本较高等明显不足<sup>[14]</sup>。在此背景下，通过引入矩阵填充理论，利用少量阵元采样数据重构完整的阵列接收信号，实现平面阵列下的高分辨率 DOA 估计将成为一种可行的技术途径，不仅有效控制硬件成本、提高不同阵列构型下的适用度，还可从本质上解决因样本数据匮乏导致 DOA 估计分辨率下降和精度不足等问题。文献[15]论证了矩阵填充理论应用于雷达信号处理的可能性；文献[16]提出应用于 MIMO 雷达的基于矩阵填充的波束形成方法；文献[17]证明了将矩阵填充理论应用于 MIMO 通信系统可行性；文献[18]和文献[19]将矩阵填充理论应用于阵列信号处理，提出基于矩阵填充的 2 维波束形成方法，成功解决了稀疏阵列波束形成旁瓣高的问题。

基于上述分析，本文将矩阵填充理论引入平面阵列 2D-DOA 估计中，提出一种基于稀疏采样阵列优化的加速逼近梯度 (Accelerated Proximal Gradient, APG)<sup>[20]</sup>算法和多重信号分类(MULTiple SIGNAL Classification, MUSIC)方法相结合的 2D-DOA 估计方法。首先，利用稀疏阵列采集辐射源数据建立 2D-DOA 估计模型，并证明其具备低秩特征，满足零空间性质(Null Space Property, NSP)，为利用矩阵填充方法补全缺失数据，重构完整矩阵提供理论基础；其次，提出一种以阵列接收信号矩阵重构误差最小为准则，利用遗传算法(Genetic Algorithm, GA)离线优化采样阵列的方法，改善稀疏阵列下重构阵列接收信号矩阵的性能，提高矩阵填充方法在不同天线构型下的适用度；最后，采用 APG 方法将稀疏阵列接收信号以较高置信度重构为完整信号，并利用 MUSIC 算法完成 2D-DOA 估计。与常规 2D-DOA 方法相比，所提方法大幅提高了平面阵列的阵元利用率，仅利用少量阵元接收信号即可实现高精度的 DOA 估计。

## 2 基于矩阵填充的 2D-DOA 估计模型

### 2.1 平面阵列 2D-DOA 估计模型

假设空间中存在  $K$  个远场窄带不相关信号分别

以 2 维方向  $(\theta_k, \phi_k)$  入射到由  $M_x \times M_y$  个阵元组成、 $x$  轴方向间距为  $d_x$ ， $y$  轴方向间距为  $d_y$  的平面均匀矩形阵列(Uniformity Rectangle Array, URA)，其中  $\theta_k \in (0^\circ, 90^\circ]$  表示第  $k$  个信号入射方向与  $z$  轴的夹角(即俯仰角)， $\phi_k \in (0^\circ, 180^\circ]$  表示第  $k$  个信号入射方向与  $x$  轴的夹角(即方位角)， $k = 1, 2, \dots, K$ ，如图 1 所示。

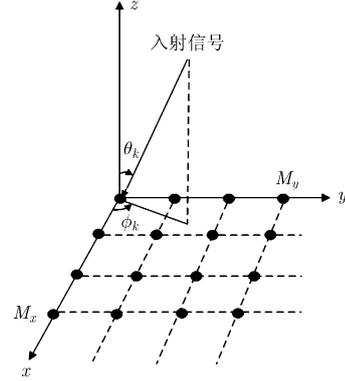


图1 均匀矩形阵列的几何结构图

以坐标原点为阵列参考点，不考虑噪声条件下， $x$  轴方向上  $M_x$  个阵元对  $K$  个远场窄带信号的接收信号可表示为

$$\mathbf{L}_x(t) = \mathbf{A}_x \mathbf{S}(t) \quad (1)$$

其中， $\mathbf{S}(t) = \text{diag}(s_k(t)) \in \mathcal{C}^{K \times K}$ ； $t = 1, 2, \dots, N$  为接收快拍数； $\mathbf{A}_x \in \mathcal{C}^{M_x \times K}$  为  $x$  轴方向导向矢量。

$$\mathbf{A}_x = [\boldsymbol{\alpha}_x(\theta_1, \phi_1), \boldsymbol{\alpha}_x(\theta_2, \phi_2), \dots, \boldsymbol{\alpha}_x(\theta_K, \phi_K)] \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_x(\theta_i, \phi_i) = \begin{bmatrix} 1 \\ \exp(j2\pi d_x \sin \theta_i \cos \phi_i / \lambda) \\ \vdots \\ \exp[j2\pi(M_x - 1)d_x \sin \theta_i \cos \phi_i / \lambda] \end{bmatrix} \quad (3)$$

式(3)中， $\lambda$  为接收信号波长。

同理，不考虑噪声条件下， $y$  轴方向上  $M_y$  个阵元对  $K$  个远场窄带信号的接收信号可表示为

$$\mathbf{L}_y(t) = \mathbf{A}_y \mathbf{S}(t) \quad (4)$$

其中， $\mathbf{A}_y \in \mathcal{C}^{M_y \times K}$  为  $y$  轴方向导向矢量。

$$\mathbf{A}_y = [\boldsymbol{\alpha}_y(\theta_1, \phi_1), \boldsymbol{\alpha}_y(\theta_2, \phi_2), \dots, \boldsymbol{\alpha}_y(\theta_K, \phi_K)] \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_y(\theta_i, \phi_i) = \begin{bmatrix} 1 \\ \exp(j2\pi d_y \sin \theta_i \cos \phi_i / \lambda) \\ \vdots \\ \exp[j2\pi(M_y - 1)d_y \sin \theta_i \cos \phi_i / \lambda] \end{bmatrix} \quad (6)$$

综合式(1)和式(4)可得，平面均匀矩形阵列对远

场窄带不相关信号的接收信号为

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}_x \mathbf{S}(t) \mathbf{A}_y^T + \mathbf{N}(t), \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

其中,  $\mathbf{N}(t)$  为接收噪声矩阵。

实际中, 考虑到符合无意/恶意干扰源特征的同频辐射源信号功率通常远高于噪声功率, 可知平面均匀矩形阵列对远场窄带不相关信号的接收信噪比 (Signal to Noise Ratio, SNR) 较高。由此, 式(7)中  $\mathbf{N}(t)$  将不会对  $\mathbf{X}(t)$  的秩产生影响, 满足  $\text{rank}(\mathbf{X}(t)) \leq \text{rank}(\mathbf{S}(t)) = K$ , 即  $\mathbf{X}(t)$  为低秩矩阵。

## 2.2 2D-DOA 估计模型零空间性质分析

若在平面均匀阵列中随机选取  $m$  个阵元构成稀疏阵列, 则该稀疏采样阵列接收信号可表示为  $\mathbf{X}_s(t)$ ,  $t = 1, 2, \dots, N$ , 且满足

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{X}_s(t)_{i,j} &= \mathbf{X}(t)_{i,j}, & (i,j) \in \Omega \\ \mathbf{X}_s(t)_{i,j} &= 0, & (i,j) \notin \Omega \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

其中,  $\Omega$  为稀疏阵采样阵元在平面均匀阵列中位置索引集合。

同上文, 稀疏采样阵列接收信号重构的完整天线阵列接收信号表示为  $\mathbf{X}(t)$ , 则根据矩阵填充理论有

$$\min \text{rank}(\mathbf{X}(t)), \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{X}(t)_{i,j} = \mathbf{X}_s(t)_{i,j}, (i,j) \in \Omega, \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (9)$$

若稀疏采样阵列接收信号矩阵满足 NSP, 则式(9)中矩阵  $\mathbf{X}(t)$  秩最小化问题可转化为矩阵  $\mathbf{X}(t)$  核范数最小化问题<sup>[21]</sup>, 即式(9)可改写为

$$\min \|\mathbf{X}(t)\|_*, \quad \text{s.t.} \quad P_\Omega(\mathbf{X}(t)) = P_\Omega(\mathbf{X}_s(t)) \quad (10)$$

其中,  $P_\Omega$  为采样算子。

$$P_\Omega(\mathbf{M}) = \begin{cases} \mathbf{M}_{i,j}, & (i,j) \in \Omega \\ 0, & (i,j) \notin \Omega \end{cases} \quad (11)$$

$P_\Omega$  的零空间可表示为

$$\text{Null}(P_\Omega) = \{\mathbf{M} \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_2} : P_\Omega(\mathbf{M}) = \mathbf{0}\} \quad (12)$$

其中,  $n_1$  和  $n_2$  是与平面阵列稀疏采样阵元位置范围有关的变量。

根据矩阵填充零空间性质,  $P_\Omega$  零空间内的矩阵通过矩阵填充方法进行完整矩阵的重构难度极大<sup>[21]</sup>。由式(3)中元素  $[\alpha_x(\theta_i, \phi_i) \neq 0]_{m_x} \neq 0$  可知,  $\mathbf{A}_x$  中元素非零, 同理  $\mathbf{A}_y$  中元素非零; 实际中对角矩阵  $\mathbf{S}(t)$  中元素亦非零。不难得出,  $\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}_x \mathbf{S}(t) \mathbf{A}_y^T + \mathbf{N}(t)$  中任一元素非零, 即对任一采样算子  $P_\Omega$  满足

$$P_\Omega(\mathbf{X}(t)) \notin \text{Null}(P_\Omega), \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (13)$$

综上所述, 式(10)满足利用矩阵填充理论通过少量阵元观测值以较大概率重构完整平面阵列接收

信号的必要条件, 为下文开展稀疏阵列下基于矩阵填充的 2D-DOA 估计提供了关键理论保证。

## 3 基于 GA 的稀疏采样阵列优化方法

根据上文论述, 稀疏阵列接收信号矩阵具备低秩特征, 且满足 NSP, 故可在选取阵元数满足  $m \geq lr(M_x + M_y - r)$  条件时通过矩阵填充方法重构平面阵列接收信号矩阵, 其中  $r$  为完整平面阵列接收信号矩阵的秩,  $l$  为常数。需要指出, 常规矩阵填充方法并未充分考虑采样阵列选取对阵列信号重构性能的影响, 无法保证在相同数量阵元条件下以最大概率重建平面阵列接收信号矩阵。针对上述问题, 本文以阵列接收信号重构误差最小为准则, 利用遗传算法对稀疏采样阵列进行离线优化, 以降低相同阵元数量下利用矩阵填充方法重构阵列接收信号矩阵的重构误差, 提高不同天线构型(如三角阵、圆阵和矩形阵等)下矩阵填充方法的适用度, 为下文进行高分辨率 2D-DOA 估计奠定重要基础。

本质而言, 稀疏阵列优化选取问题可转化为平面阵列信号重构误差最小问题, 即将稀疏采样阵列选取方案作为样本, 以最小化阵列信号重构误差为优化目标, 在有限次迭代过程中利用适应度函数对不同样本进行评估和更新。

$$\min \text{fit}(d_1, d_2, \dots, d_m) \quad (14)$$

其中,  $(d_1, d_2, \dots, d_m) \in \mathbf{R}^m$  为稀疏阵列中  $m$  个阵元的位置矢量集合;  $\text{fit}(\cdot)$  表征平面阵列信号重构误差的适应度函数

$$\text{fit}(d_1, d_2, \dots, d_m) = \|\mathbf{M} - \mathbf{X}\|_2 / \|\mathbf{M}\|_2 \quad (15)$$

式(15)中,  $\mathbf{M}$  为平面阵列接收信号矩阵;  $\mathbf{X}$  为利用矩阵填充方法重构后的矩阵。

不难发现, 式(14)中最小化重构误差适应度函数是典型的离散非线性多变量优化问题。目前, 解决该类问题可采用遗传算法, 模拟退火算法 (Simulated Annealing, SA) 及神经网络 (Neural Network, NN) 等经典智能优化算法。相比于 SA 和 NN 方法, GA 在解决组合优化问题时将仿照生物进化和遗传规律, 遵循优胜劣汰自然进化规则, 在最大限度保持样本多样性前提下, 对解空间不同区域的多个点进行搜索, 通过反复迭代计算, 在全局范围内寻找问题最优解, 从而保证在搜索过程中以最大概率获取全局最优解。

GA 优化主要包括编码和译码、初始化群体选择、适应度函数计算、选择、交叉以及变异等关键步骤。鉴于此, 本文将以平面阵列中阵元位置作为染色体变量, 选择适当的初始种群, 交叉、变异概

率，并采用轮盘赌的方式选择复制对象，以式(14)作为适应度函数对最优稀疏采样阵列进行搜索。具体步骤为：

步骤 1 随机选择若干组阵元作为 GA 的初始化群体；

步骤 2 以式(14)作为适应度函数计算每个个体的适应度值；

步骤 3 采用轮盘赌的方式，根据适应度值选择优良的个体，同时将适应度值最高的个体直接复制到下一代，保证最优个体在遗传过程中不被去除；

步骤 4 以预设的交叉概率采用两点交叉法产生新个体；

步骤 5 以预设的变异概率在交叉后的种群中进行变异产生后代；

步骤 6 若达到预设的迭代次数或得到理想的适应度值，将最优个体取出作为最优采样阵列搜索结果，否则返回步骤 2。

#### 4 APG-MUSIC 算法

目前，求解矩阵填充问题的方法主要包括奇异值门限(Singular Value Threshold, SVT)算法，不动点延拓(Fixed Point Continuation, FPC)算法以及加速逼近梯度(APG)算法等。其中，SVT 算法能较好地解决矩阵填充问题，但存在对秩较大矩阵重构效率低等不足；FPC 算法采用算子分裂技术构造的迭代算法求解矩阵 Lasso 模型以恢复完整矩阵，但对于相关性较强的数据该方法常会出现矩阵重构性能不稳定的情况；APG 算法是由 CS 的 FISTA(Fast Iterative Shrinkage Threshold Algorithm)延伸而来，是求解无约束凸优化问题的常用方法，相对于上述两种方法的收敛速度有明显优势，同时其矩阵重构性能对数据不敏感，具有较高的稳健性，因而得到广泛应用。鉴于此，本文将 APG 方法与 MUSIC 方法相结合，提出一种基于稀疏采样阵列优化的 2D-DOA 估计方法。

通常 APG 算法用以解决如式(16)所示极小化问题<sup>[20]</sup>

$$\min_{X \in H} F(X) = g(X) + f(X) \quad (16)$$

其中， $H$  为实希尔伯特子空间； $g(X)$  和  $f(X)$  均为凸函数，且  $f(X)$  为 Lipschitz 连续的。

为了便于采用 APG 算法重构平面阵列接收信号矩阵<sup>[20]</sup>，令

$$g(X) = \frac{1}{2} \|P_{\Omega}(\mathbf{X}(t)) - \mathbf{X}_s(t)\|_F^2 \quad (17)$$

$$f(X) = \mu \|\mathbf{X}(t)\|_* \quad (18)$$

其中， $\mu$  为正实数。那么，式(10)可改写为可利用

APG 算法进行优化求解的问题。

$$\min \mu \|\mathbf{X}(t)\|_* + \frac{1}{2} \|P_{\Omega}(\mathbf{X}(t)) - \mathbf{X}_s(t)\|_F^2 \quad (19)$$

其中， $\mu$  为常数。

针对式(19)所示优化问题，利用 APG 算法重构完整接收信号矩阵的步骤可归纳为：

步骤 1 令  $\mathbf{Y}_k = \mathbf{X}_k + \left( \frac{\omega_{k-1}}{\omega_k} - 1 \right) (\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1})$ ，

当  $k = 0$  时， $\omega_0 = \omega_1 = 1$ ， $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_s(t)$ ；

步骤 2 令  $\mathbf{G}_k = \mathbf{Y}_k - (\omega_k)^{-1} P_{\Omega}^* (P_{\Omega}(\mathbf{Y}_k) - \mathbf{X}_s(t))$ ；

步骤 3 计算  $\mathbf{G}_k$  的奇异值收缩算子  $S_{\tau}(\mathbf{G}_k)$ ；

步骤 4 令  $\mathbf{X}_{k+1} = S_{\tau}(\mathbf{G}_k)$ ；

步骤 5 更新  $\omega_{k+1} = \left[ 1 + \sqrt{1 + 4\omega_k^2} \right] / 2$ ；

步骤 6 若满足  $\|\mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{k-1}\|_F^2 / \|\mathbf{Y}_{k-1}\|_F^2 < \varepsilon$ ，则停止迭代，将  $\mathbf{X}_k$  作为矩阵重构结果输出，否则转入步骤 1。

根据文献[20]和文献[22]所得结论，步骤 3 中奇异值收缩算子  $S_{\tau}(\mathbf{G}_k)$  通过对  $\mathbf{G}_k$  的各奇异值设置一个软阈值，使较小奇异值收缩至 0，以保证迭代过程中优化变量具备低秩特征，重构最小秩矩阵。

$$S_{\tau}(\mathbf{G}_k) = \mathbf{U} \text{diag} \left( (\sigma - \mu / \tau)_+ \right) \mathbf{V}^T \quad (20)$$

其中， $\mathbf{U}$  和  $\mathbf{V}$  分别表示对  $\mathbf{G}_k$  奇异值分解所得左右奇异值特征矩阵； $\sigma$  为  $\mathbf{G}_k$  奇异值； $\tau \in (0, 1]$  为奇异值收缩阈值； $\text{diag}(\boldsymbol{\alpha})$  表示以向量  $\boldsymbol{\alpha}$  为对角线元素的矩阵； $\boldsymbol{\alpha}_+ = \max(0, \boldsymbol{\alpha})$ 。

利用 APG 算法优化求解式(19)的解即为完整平面均匀阵列接收信号的估计值  $\mathbf{X}(t)$ 。将  $\mathbf{X}(t)$  向量化可得完整平面阵列接收信号的向量形式

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \text{vec}[\mathbf{X}(t)] = \text{vec}[\mathbf{A}_x \mathbf{S}(t) \mathbf{A}_y^T + \mathbf{N}(t)] \\ &= \sum_{i=1}^K [\boldsymbol{\alpha}_y(\phi_i, \theta_i) \otimes \boldsymbol{\alpha}_x(\phi_i, \theta_i)] s_i(t) + \text{vec}[\mathbf{N}(t)] \end{aligned} \quad (21)$$

若令  $\boldsymbol{\alpha}(\phi_i, \theta_i) = \boldsymbol{\alpha}_y(\phi_i, \theta_i) \otimes \boldsymbol{\alpha}_x(\phi_i, \theta_i)$ ， $\mathbf{n}(t) = \text{vec}[\mathbf{N}(t)]$ ，则式(21)可改写为

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^K \boldsymbol{\alpha}(\phi_i, \theta_i) s_i(t) + \mathbf{n}(t), \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (22)$$

若  $\mathbf{R}_x$  为  $\mathbf{x}(t)$  的协方差矩阵，则对其进行特征分解后可得

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{U}_S \boldsymbol{\Sigma}_S \mathbf{U}_S^H + \mathbf{U}_N \boldsymbol{\Sigma}_N \mathbf{U}_N^H \quad (23)$$

其中， $\mathbf{U}_S$  为信号子空间，由  $K$  个大特征值对应特征向量组成； $\mathbf{U}_N$  为噪声子空间，由剩余小特征值对应特征向量组成。信号子空间和噪声子空间满足

$$\mathbf{U}_S \mathbf{U}_S^H + \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H = \mathbf{I} \quad (24)$$

由此，信源的 2 维谱估计函数可表示为

$$P_{2\text{D-MUSIC}} = \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}^H(\theta, \phi) \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \boldsymbol{\alpha}(\theta, \phi)} \quad (25)$$

## 5 仿真分析

假设平面均匀阵列中  $M_x = 64$ ,  $M_y = 64$ ,  $d_x = d_y = \lambda/2$ , 即平面均匀阵列共包含  $64 \times 64 = 4096$  个阵元, 且  $x$  方向和  $y$  方向的阵元间距均为  $\lambda/2$ 。为了便于分析和对比, 下列实验中稀疏阵列将按照随机选取和利用 GA 方法优化选取两种方式生成, 其中稀疏阵列阵元数  $m = 1200$ ,  $l = 2$ , 满足  $m \geq lr(M_x + M_y - r)$  约束条件。设空间中存在  $K = 3$  个远场窄带不相关信号分别以  $(30^\circ, 15^\circ)$ ,  $(20^\circ, 25^\circ)$ ,  $(10^\circ, 35^\circ)$  入射到平面阵列。

**实验1** 稀疏阵列下的 2D-DOA 估计。图 2 为随机选取稀疏阵列下, 快拍数  $N = 50$ , 信噪比  $\text{SNR} = 10$  dB 时, 采用 MUSIC 算法对入射信号 2D-DOA 估计结果。图 3 为相同实验条件下, 采用基于稀疏采样阵列优化的 APG-MUSIC 算法对入射信号进行 2D-DOA 估计的结果。通过对比不难发现, 由于采样阵列中阵元数目远少于完整平面阵列阵元数目, 且阵元分布不均匀, 故直接利用 MUSIC 算法进行 2 维 DOA 估计时将会面临平均旁瓣电平上升, 频谱展宽等问题, 严重影响 2D-DOA 估计精度。相比而言, 本文方法在采样阵列规模一致条件下 2D-DOA 估计性能更优, 主要得益于其在稀疏采样阵列优化基础上利用稀疏阵列接收信号能够以较大概率重构完整平面阵列接收信号, 一定程度上增加了 DOA 估计积累信噪比。由此, 利用 MUSIC 方法进行 2 维 DOA 估计将有效抑制旁瓣电平, 保证 2D-DOA 估计的精度。

**实验2** 矩阵重构精度和 DOA 估计精度随快拍数和阵元数变化趋势验证。图 4 和图 5 分别为稀疏采样阵列阵元数目分别为 900, 1200, 1500, 信噪比  $\text{SNR} = 10$  dB 时, 在已优化稀疏采样阵列下接收信号矩阵重构误差和 2D-DOA 估计误差随着快拍

数变化的 500 次蒙特卡洛仿真实验结果。仿真结果表明, 伴随着接收信号快拍数的增加, 入射信号实现了相干积累, 使得多快拍信号积累后信噪比大幅提高, 导致矩阵重构误差随快拍数增加而逐渐降低 (即重构阵列接收信号逐渐逼近完整阵列接收信号), 为后续 2D-DOA 估计提供切实基础。此外, 该实验结果也显示出稀疏阵列阵元数不同时矩阵重构误差存在显著差异, 一定程度验证了同一阵列构型下稀疏阵列阵元数目与矩阵重构性能以及 DOA 估计精度间的制约关系。

**实验3** 稀疏采样阵列选取与阵列信号重构性能以及 DOA 估计性能关系验证。图 6 和图 7 分别为快拍数  $N = 200$ , 信噪比  $\text{SNR} = 10$  dB 时, 通过随机选取和 GA 优化选取两种方式生成稀疏采样阵列下平面阵列接收信号矩阵重构误差和 2D-DOA 估计误差随阵元数变化的 500 次蒙特卡洛仿真实验结果。仿真结果表明, 在阵元数分别为 900, 1200, 1500, 1800, 2100 条件下, 采用 GA 优化选取的稀疏采样阵列相比随机选取生成的稀疏采样阵列均具有更优的矩阵重构性能, 显著提高 DOA 估计精度。该实验结果表明稀疏采样阵列优化在阵列信号重构问题中的重要意义和研究价值。

## 6 结论

平面阵列下的 2D-DOA 估计以其较高的空间分辨率和对无源/有源干扰鲁棒性优等显著优势在阵列信号处理中得到广泛研究。为规避该体制采样设备复杂, 软硬件设计成本高等因素对波达方向估计研究的制约, 本文提出一种基于稀疏采样阵列优化的 APG-MUSIC 2 维 DOA 估计方法。与常规 2D-DOA 估计方法相比, 本文方法不仅具备较高估计精度和较低旁瓣电平, 而且对阵元采样数据需求大幅降低, 有效提高阵元利用率, 具有较高研究价值和广阔应用前景。

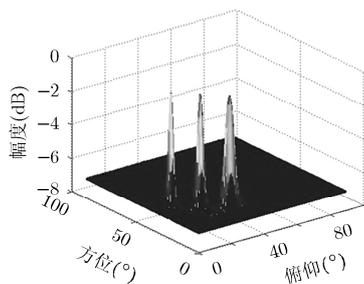


图 2 随机选取稀疏采样阵列下 MUSIC 算法 2 维 DOA 估计结果

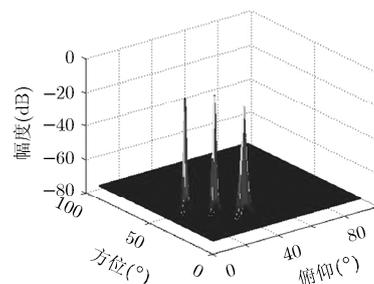


图 3 基于 GA 优化的稀疏采样阵列下 APG-MUSIC 算法 2 维 DOA 估计结果

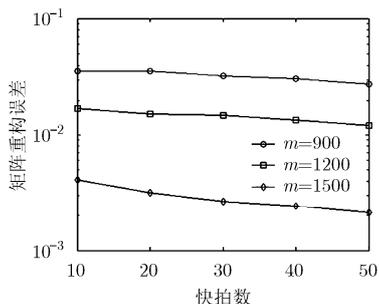


图 4 不同规模采样阵列下矩阵重构误差随快拍数的变化曲线

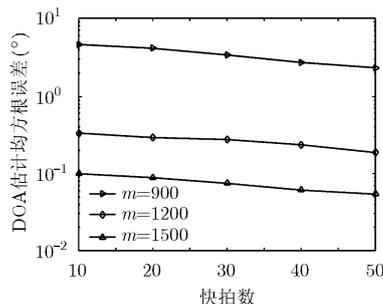


图 5 不同规模采样阵列下DOA估计误差随快拍数的变化曲线

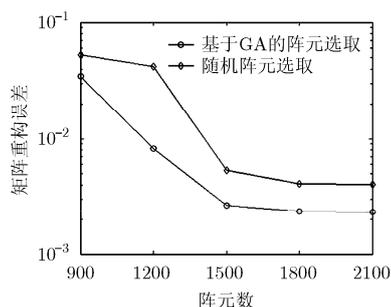


图 6 不同稀疏采样阵列下接收信号矩阵重构误差随阵元数变化曲线

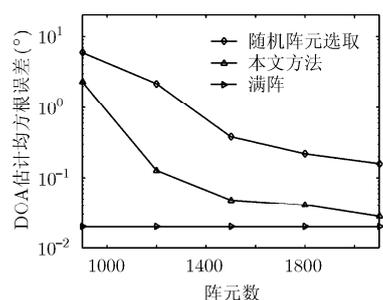


图 7 2维DOA估计均方根误差随稀疏采样阵列规模变化曲线

## 参考文献

- [1] HARRY L and VAN T. Optimum Array Processing [M]. New York: John Wiley & Sons, 2002: 870-875.
- [2] 张光义. 相控阵雷达技术[M]. 北京: 电子工业出版社, 2006: 68-75.
- [3] SKOLINK M. Introduction to Radar Systems [M]. New York: McGraw-Hill Education, 2002: 491-493.
- [4] YAO Bobin, ZHANG Weile, and WU Qisheng. Weighted subspace fitting for two-dimension DOA estimation in massive MIMO systems[J]. *IEEE Access*, 2017, 5: 14020-14027. doi: 10.1109/ACCESS.2017.2731379.
- [5] ZHANG Tian, ZHANG Zhe, and WANG Yue. Low-complexity optimization for two-dimensional direction-of-arrival estimation via decoupled atomic norm minimization [C]. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, New Orleans, 2017: 3071-3075. doi: 10.1109/ICASSP.2017.7952721.
- [6] WALID M and HASSAN M. A novel approach for 2D-DOA estimation using cross-shaped arrays[C]. *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, San Diego, 2008: 1-4. doi: 10.1109/APS.2008.4619295.
- [7] ZHANG Yanhong, LIN Qi, MU Xiaomin, et al. 2-D DOA estimation of wideband LFM signal in fractional fourier domain[C]. *First International Conference on Innovative Computing, Information and Control*, Beijing, 2006: 6-9. doi: 10.1109/ICICIC.2006.376.
- [8] LUCAS C, SYMEON C, and MOEZ D. An efficient online adaptive sampling strategy for matrix completion[C]. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, New Orleans, 2017: 3969-3973. doi: 10.1109/ICASSP.2017.7952901.
- [9] KONSTANTIN U and PIERRE C. Hankel low-rank matrix completion: Performance of the nuclear norm relaxation[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2016, 10(4): 637-646. doi: 10.1109/JSTSP.2016.2535182.
- [10] RUCHI T, BODA M, and KETAN R. Adaptive low-rank matrix completion[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2017, 65(14): 3603-3616. doi: 10.1109/TSP.2017.2695450.
- [11] SEYED M and ALI M. Array interpolation using covariance matrix completion of minimum-size virtual array[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2017, 24(7): 1063-1067. doi: 10.1109/LSP.2017.2708750.
- [12] PAL P and VAIDYANATHAN P. A grid-less approach to underdetermined direction of arrival estimation via low rank matrix denoising[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2014, 21(6): 737-741. doi: 10.1109/LSP.2014.2314175.
- [13] DONOHO D. Compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(4): 1289-1306. doi: 10.1109/TIT.2006.871582.
- [14] ZENG Wenhao, LI Hongtao, ZHU Xiaohua, et al. A FPC-

- ROOT algorithm for 2D-DOA estimation in sparse array[J]. *International Journal of Antennas and Propagation*, 2016, 2016: 1–6. doi: 10.1155/2016.5951717.
- [15] SUN S, WAHEED U, and PETROPULU A. MIMO-MC radar: A mimo radar approach based on matrix completion[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2015, 51(3): 1839–1852. doi: 10.1109/TAES.2015.140452.
- [16] SUN Shuqiao, and PETROPULU A. On transmit beamforming in MIMO radar with matrix completion[C]. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Brisbane, 2015: 2774–2778. doi: 10.1109/ICASSP.2015.7178476.
- [17] LI Bo, PETROPULU A, and WADE T. Optimum co-design for Spectrum sharing between matrix completion based MIMO radars and a MIMO communication system[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 64(17): 4562–4575. doi: 10.1109/TSP.2016.2569479.
- [18] ZENG Wenhao, LI Hongtao, ZHU Xiaohua, *et al.* A 2D adaptive beamforming method in sparse array[J]. *International Journal of Electronics and Communications*, 2017, 77: 100–104. doi: 10.1016/j.aee.2017.04.015.
- [19] WENG Zhiyuan and WANG Xin. Low-rank matrix completion for array signal processing[C]. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Kyoto, 2012: 2697–2700. doi: 10.1109/ICASSP.2012.6288473.
- [20] TOH K and YUN S. An accelerated proximal gradient algorithm for nuclear norm regularized linear least squares problems[J]. *Pacific Journal of Optimization*, 2010, 6(3): 615–40.
- [21] HU Yao, ZHANG Debing, YE Jieping, *et al.* Fast and accurate matrix completion via truncated nuclear norm regularization [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2013, 35(9): 2117–2130. doi: 10.1109/TPAMI.2012.271.
- [22] RECHT B, XU Weiyu, and HASSIBI B. Necessary and sufficient conditions for success of the nuclear norm heuristic for rank minimization[C]. *IEEE Conference on Decision and Control*, Cancun, 2008: 3065–3070. doi: 10.1109/CDC.2008.4739332.
- 宋 虎: 男, 1980年生, 研究员, 主要研究方向为雷达系统及信号处理.
- 蒋迺倜: 男, 1985年生, 高级工程师, 主要研究方向为雷达信号处理及FPGA高速电路设计.
- 刘 溶: 男, 1985年生, 高级工程师, 主要研究方向为阵列信号处理.
- 李洪涛: 男, 1979年生, 副教授, 主要研究方向为雷达系统及数字信号处理.