

## 四元数域对合增广宽线性自适应波束形成

刘志文\* 王 荔 徐友根

(北京理工大学信息与电子学院 北京 100081)

**摘 要:** 该文提出一种基于 4 元数的宽线性自适应波束形成方法,该方法在利用 4 元数构建单个阵元输出的基础上,通过充分挖掘 4 元数的 3 种对合信息,联合信号的非圆特性,建立 4 元数域对合增广信号模型,进而实现 4 元数域宽线性自适应波束形成。同传统 4 元数波束形成技术相比,该方法对非圆信号的接收性能显著提升,同时可以实现阵列虚拟孔径扩展,增大自适应波束形成干扰抑制自由度。仿真实验验证了所提波束形成方法的性能。

**关键词:** 信号处理; 自适应波束形成; 4 元数; 宽线性处理; 非圆信号

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2017)07-1525-07

DOI: 10.11999/JEIT160988

## Quaternion-valued Widely Linear Adaptive Beamforming via Involution Augmentation

LIU Zhiwen WANG Li XU Yougen

(School of Information and Electronics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

**Abstract:** An adaptive beamformer based on quaternion-valued widely linear processing is proposed, in which the output is expressed in quaternions for each array element. Taking into account the array output vector and its three involutions simultaneously, a quaternion-valued augmented signal model is established to exploit the noncircular information of the desired signal. The involution augmented adaptive beamforming is finally fulfilled based on the quaternion-valued widely linear processing. Compared with the conventional quaternion beamformers, the proposed beamformer has an improved reception capability for noncircular signals. The aperture of the array is extended and hence the degree-of-freedom of interference suppression is increased via widely linear processing. Simulations results illustrate the performance of the proposed beamformer.

**Key words:** Signal processing; Adaptive beamforming; Quaternion; Widely linear processing; Noncircular signal

### 1 引言

自适应波束形成是阵列信号处理的主要研究内容之一,在雷达、声呐、无线通信、医学影像以及地震探测等众多领域得到了广泛应用<sup>[1-6]</sup>。由矢量传感器构成的阵列能够获取和利用入射信号的极化信息,完成空-时-极化域联合滤波,从而提高波束形成的性能。文献[7,8]较早研究了 2 分量和 3 分量矢量传感器阵列的自适应滤波与抗干扰性能,初步验证了利用极化差异可完成对干扰的有效抑制。随后,文献[9]基于单个全电磁矢量传感器研究了最小方差滤波器的性能,进一步证实了极化域滤波的优越性。

上述研究主要基于长矢量模型,其未充分体现矢量传感器阵列输出信号的空-时-极化域多维特征。

近年来,人们发现利用多元数这一数学工具能够更好地组织多维数据结构,以更直观地表征和分析矢量阵列信号。其中,在信号参数估计方面,文献[10]研究了基于 2 分量矢量传感器阵列的 4 元数多重信号分类方法,文献[11]将旋转不变信号参数估计方法推广至 4 元数域。此外,以双 4 元数为工具,文献[12,13]研究了多重信号分类参数估计方法。在波束形成方面,文献[14]将经典的 Capon 波束形成器推广至 4 元数域。文献[15]在提出 4 元数域空域匹配滤波器后,进一步研究了具有双路结构的干扰相消方法。文献[16]提出了基于最坏情况最优化准则的 4 元数域鲁棒自适应波束形成方法。针对大型阵列系统,为减少系统复杂度和功率消耗问题,文献[17]提出了一种 2 次加权 4 元数最小均方方法。总体看来,尽管 4 元数域自适应波束形成已得到了越来越多的关注,但现有方法主要集中于 4 元数域线性滤波,对利用 4 元数接收数据的 2 阶统计特性的讨论甚少。

文献[18]针对 4 元数域均方误差估计问题研究

收稿日期: 2016-09-29; 改回日期: 2017-02-10; 网络出版: 2017-03-21

\*通信作者: 刘志文 zwliu@bit.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(61490691, 61331019)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61490691, 61331019)

了4元数域宽线性最小方差滤波算法,结果表明利用4元数信号的2阶统计特性可以提高算法性能。基于此,为了充分挖掘和利用4元数域信号的标准协方差及其伪协方差,基于4元数的半宽线性处理被应用于自适应波束形成<sup>[19]</sup>。但4元数域半宽线性波束形成器主要考虑圆信号,仅利用了4元数阵列输出矢量及其*j*-部对合矢量。

事实上,非圆信号(如AM, BPSK, UQPSK等)广泛应用于实际系统中。由于非圆信号与其共轭分量之间存在很强的相关性,利用入射信号的非圆特性可以提升自适应波束形成的性能<sup>[20-22]</sup>。本文从充分挖掘和使用输出矢量的3种对合矢量信息出发,联合利用信号非圆信息和4元数2阶统计特性建立4元数域对合增广信号模型,在此基础上实现基于宽线性处理的4元数域自适应波束形成。

## 2 4元数的相关定义<sup>[23-25]</sup>

为方便起见,令 $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ 和 $\mathbb{H}$ 分别表示实数、复数和4元数集合,4元数 $q \in \mathbb{H}$ 定义为

$$q = q_r + iq_i + jq_j + kq_k \quad (1)$$

式中, $q_r, q_i, q_j, q_k \in \mathbb{R}$ 分别为4元数 $q$ 的实部和3个虚部, $i, j, k$ 为虚数单位且满足式(2)~式(5)的关系:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \quad (2)$$

$$ij = -ji = k \quad (3)$$

$$jk = -kj = i \quad (4)$$

$$ki = -ik = j \quad (5)$$

除式(1)外,4元数也可表示为式(6)的形式:

$$q = q_1 + iq_2 \quad (6)$$

式中, $q_1 = q_r + jq_j$ 和 $q_2 = q_i + jq_k$ ,故一个复数可以视为一个*i*-部和*k*-部为零的4元数。

4元数的共轭定义为

$$q^* = q_r - iq_i - jq_j - kq_k \quad (7)$$

4元数的3种对合分别定义为

$$q^{(i)} = -iqi = q_r + iq_i - jq_j - kq_k \quad (8)$$

$$q^{(j)} = -jqj = q_r - iq_i + jq_j - kq_k \quad (9)$$

$$q^{(k)} = -kqk = q_r - iq_i - jq_j + kq_k \quad (10)$$

类似式(1),4元数矩阵 $Q \in \mathbb{H}^{M \times N}$ 定义为

$$Q = Q_r + iQ_i + jQ_j + kQ_k \quad (11)$$

式中, $Q_r, Q_i, Q_j, Q_k \in \mathbb{R}^{M \times N}$ 。

$Q$ 的共轭 $Q^*$ ,转置 $Q^T$ 和共轭转置 $Q^H$ 分别定义为

$$Q^* = Q_r - iQ_i - jQ_j - kQ_k \quad (12)$$

$$Q^T = Q_r^T + iQ_i^T + jQ_j^T + kQ_k^T \quad (13)$$

$$Q^H = Q_r^T - iQ_i^T - jQ_j^T - kQ_k^T \quad (14)$$

## 3 4元数域对合增广信号模型

假设波束形成阵列由*N*个特性相同的2分量矢量传感器组成,它可以划分为两个空间几何相同的子阵,两者复数域输出具有式(15)和式(16)的形式:

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{a}_{1,0}s_0(t) + \sum_{m=0}^M \mathbf{a}_{1,m}s_m(t) + \mathbf{n}_1(t) \quad (15)$$

$$\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{a}_{2,0}s_0(t) + \sum_{m=0}^M \mathbf{a}_{2,m}s_m(t) + \mathbf{n}_2(t) \quad (16)$$

式中, $\mathbf{a}_{1,0}$ 和 $\mathbf{a}_{2,0}$ 为两个子阵对应于期望信号 $s_0(t)$ 的导向矢量, $\mathbf{a}_{1,m}$ 和 $\mathbf{a}_{2,m}$ 为两个子阵对应于第*m*个干扰 $s_m(t)$ 的导向矢量, $\mathbf{n}_1(t)$ 和 $\mathbf{n}_2(t)$ 为两个子阵的噪声矢量。

采用式(6)的表示形式,可得整个阵列的4元数域输出:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_1(t) + i\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{a}_0s_0(t) + \sum_{m=1}^M \mathbf{a}_m s_m(t) + \mathbf{n}(t) \quad (17)$$

式中, $\mathbf{a}_m = \mathbf{a}_{1,m} + i\mathbf{a}_{2,m}$ 为 $s_m(t)$ 的4元数域导向矢量, $\mathbf{n}(t) = \mathbf{n}_1(t) + i\mathbf{n}_2(t)$ 为4元数域噪声矢量。

根据式(18)的4元数性质:

$$ai = ia^*, aj = ja, ak = ka^* \quad (18)$$

其中, $a = a_r + ja_j \in \mathbb{H}$ , $a_r \in \mathbb{R}$ , $a_j \in \mathbb{R}$ , $\mathbf{x}(t)$ 的*i*-部对合矢量 $\mathbf{x}^{(i)}(t)$ 具有式(19)的形式:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(i)}(t) &= -i\mathbf{x}(t)i = -i \left[ \mathbf{a}_0s_0(t) + \sum_{m=1}^M \mathbf{a}_m s_m(t) + \mathbf{n}(t) \right] i \\ &= -i\mathbf{a}_0s_0(t)i - i \sum_{m=1}^M \mathbf{a}_m s_m(t)i - i\mathbf{n}(t)i \\ &= -i\mathbf{a}_0i \cdot s_0^*(t) + \sum_{m=1}^M (-i\mathbf{a}_m i) \cdot s_m^*(t) - i\mathbf{n}(t)i \\ &= \mathbf{a}_0^{(i)}s_0^*(t) + \sum_{m=1}^M \mathbf{a}_m^{(i)}s_m^*(t) + \mathbf{n}^{(i)}(t) \end{aligned} \quad (19)$$

式中, $\mathbf{a}_m^{(i)}$ 和 $\mathbf{n}^{(i)}(t)$ 分别为 $\mathbf{a}_m$ 的*i*-部对合矢量和 $\mathbf{n}(t)$ 的*i*-部对合矢量。

类似地,可得 $\mathbf{x}(t)$ 的*j*-部对合矢量 $\mathbf{x}^{(j)}(t)$ 和*k*-部对合矢量 $\mathbf{x}^{(k)}(t)$ 如式(20)和式(21):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(j)}(t) &= -j\mathbf{x}(t)j = -j \left[ \mathbf{a}_0s_0(t) + \sum_{m=1}^M \mathbf{a}_m s_m(t) + \mathbf{n}(t) \right] j \\ &= -j\mathbf{a}_0s_0(t)j - j \sum_{m=1}^M \mathbf{a}_m s_m(t)j - j\mathbf{n}(t)j \\ &= -j\mathbf{a}_0j \cdot s_0(t) + \sum_{m=1}^M (-j\mathbf{a}_m j) \cdot s_m(t) - j\mathbf{n}(t)j \\ &= \mathbf{a}_0^{(j)}s_0(t) + \sum_{m=1}^M \mathbf{a}_m^{(j)}s_m(t) + \mathbf{n}^{(j)}(t) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{(k)}(t) &= -k\mathbf{x}(t)k = -k\left[\mathbf{a}_0s_0(t) + \sum_{m=1}^M \mathbf{a}_m s_m(t) + \mathbf{n}(t)\right]k \\
&= -k\mathbf{a}_0s_0(t)k - k\sum_{m=1}^M \mathbf{a}_m s_m(t)k - k\mathbf{n}(t)k \\
&= -k\mathbf{a}_0k \cdot s_0^*(t) + \sum_{m=1}^M (-k\mathbf{a}_m k) \cdot s_m^*(t) - k\mathbf{n}(t)k \\
&= \mathbf{a}_0^{(k)} s_0^*(t) + \sum_{m=1}^M \mathbf{a}_m^{(k)} s_m^*(t) + \mathbf{n}^{(k)}(t) \quad (21)
\end{aligned}$$

式中,  $\mathbf{a}_m^{(j)}$  和  $\mathbf{n}^{(j)}(t)$  分别为  $\mathbf{a}_m$  的  $j$ -部对合矢量和  $\mathbf{n}(t)$  的  $j$ -部对合矢量,  $\mathbf{a}_m^{(k)}$  和  $\mathbf{n}^{(k)}(t)$  分别为  $\mathbf{a}_m$  的  $k$ -部对合矢量和  $\mathbf{n}(t)$  的  $k$ -部对合矢量。

利用  $\mathbf{x}(t)$  和其对应的对合矢量, 4 元数域阵列输出矢量的协方差矩阵和 3 种伪协方差矩阵可分别定义为

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x},\mathbf{x}} = E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)\} \quad (22)$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x},\mathbf{x}^{(i)}} = E\{\mathbf{x}(t)[\mathbf{x}^{(i)}(t)]^H\} \quad (23)$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x},\mathbf{x}^{(j)}} = E\{\mathbf{x}(t)[\mathbf{x}^{(j)}(t)]^H\} \quad (24)$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x},\mathbf{x}^{(k)}} = E\{\mathbf{x}(t)[\mathbf{x}^{(k)}(t)]^H\} \quad (25)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 s_0(t) \\ \mathbf{a}_0^{(j)} s_0(t) \\ \mathbf{a}_0^{(i)} s_0^*(t) \\ \mathbf{a}_0^{(k)} s_0^*(t) \end{bmatrix} + \sum_{m=1}^M \begin{bmatrix} \mathbf{a}_m s_m(t) \\ \mathbf{a}_m^{(j)} s_m(t) \\ \mathbf{a}_m^{(i)} s_m^*(t) \\ \mathbf{a}_m^{(k)} s_m^*(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{n}(t) \\ \mathbf{n}^{(j)}(t) \\ \mathbf{n}^{(i)}(t) \\ \mathbf{n}^{(k)}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_0^{(j)} \\ \mathbf{a}_0^{(i)} e^{-j\psi_0} \\ \mathbf{a}_0^{(k)} e^{-j\psi_0} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{a}}_0} s_0(t) + \sum_{m=1}^M \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{a}_m \\ \mathbf{a}_m^{(j)} \\ \mathbf{a}_m^{(i)} e^{-j\psi_m} \\ \mathbf{a}_m^{(k)} e^{-j\psi_m} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{a}}_m} s_m(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{n}(t) \\ \mathbf{n}^{(j)}(t) \\ \mathbf{n}^{(i)}(t) \\ \mathbf{n}^{(k)}(t) \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{n}}(t)} \quad (29)$$

式中,  $\tilde{\mathbf{n}}(t)$  和  $\tilde{\mathbf{a}}_m$  分别称为 4 元数域增广噪声矢量和第  $m$  个信号的增广导向矢量。

令 4 元数域对合增广波束形成加权矢量为  $\mathbf{w} \in \mathbb{H}^{4N \times 1}$ , 则波束形成输出可表示为

$$y(t) = \mathbf{w}^H \tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{w}^H \tilde{\mathbf{a}}_0 s_0(t) + \mathbf{w}^H \tilde{\mathbf{a}}_m s_m(t) + \mathbf{w}^H \tilde{\mathbf{n}}(t) \quad (30)$$

## 4 4 元数域对合增广宽线性波束形成

### 4.1 算法原理与实现

由式(30)知基于 4 元数域对合增广模型的波束形成器输出总功率为

$$E\{|y(t)|^2\} = E\{|\mathbf{w}^H \tilde{\mathbf{x}}(t)|^2\} = \mathbf{w}^H \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{w} \quad (31)$$

为了减少干扰和噪声在波束形成输出中的权重, 宽线性 4 元数域最小方差无失真响应波束形成器 (WL-QMVDR) 的最优权矢量  $\mathbf{w}$  可通过式(32)的设计准则来求得。

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{w}, \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{w}^H \tilde{\mathbf{a}}_0 = 1 \quad (32)$$

即在保证期望信号无失真的条件  $\mathbf{w}^H \tilde{\mathbf{a}}_0 = 1$  约束下, 使输出总功率  $\mathbf{w}^H \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{w}$  最小。

可通过拉格朗日乘子法求解  $\mathbf{w}$ , 首先令

$$\ell(\mathbf{w}, \lambda) = \mathbf{w}^H \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{w} + (\mathbf{w}^H \tilde{\mathbf{a}}_0 - 1)\lambda \quad (33)$$

为充分挖掘伪协方差矩阵中蕴含的信息, 进一步定义 4 元数域增广输出矢量为

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \left[ \mathbf{x}(t) \right]^T \left[ \mathbf{x}^{(j)}(t) \right]^T \left[ \mathbf{x}^{(i)}(t) \right]^T \left[ \mathbf{x}^{(k)}(t) \right]^T \quad (26)$$

相应地, 增广输出矢量  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$  的协方差矩阵  $\tilde{\mathbf{R}}$  为

$$\tilde{\mathbf{R}} = E\{\tilde{\mathbf{x}}(t)\tilde{\mathbf{x}}^H(t)\} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{x},\mathbf{x}} & \mathbf{R}_{\mathbf{x},\mathbf{x}^{(j)}} & \mathbf{R}_{\mathbf{x},\mathbf{x}^{(i)}} & \mathbf{R}_{\mathbf{x},\mathbf{x}^{(k)}} \\ \mathbf{R}_{\mathbf{x},\mathbf{x}^{(j)}}^{(j)} & \mathbf{R}_{\mathbf{x},\mathbf{x}}^{(j)} & \mathbf{R}_{\mathbf{x},\mathbf{x}^{(k)}}^{(j)} & \mathbf{R}_{\mathbf{x},\mathbf{x}^{(i)}}^{(j)} \\ \mathbf{R}_{\mathbf{x},\mathbf{x}^{(i)}}^{(i)} & \mathbf{R}_{\mathbf{x},\mathbf{x}^{(k)}}^{(i)} & \mathbf{R}_{\mathbf{x},\mathbf{x}}^{(i)} & \mathbf{R}_{\mathbf{x},\mathbf{x}^{(j)}}^{(i)} \\ \mathbf{R}_{\mathbf{x},\mathbf{x}^{(k)}}^{(k)} & \mathbf{R}_{\mathbf{x},\mathbf{x}^{(i)}}^{(k)} & \mathbf{R}_{\mathbf{x},\mathbf{x}^{(j)}}^{(k)} & \mathbf{R}_{\mathbf{x},\mathbf{x}}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (27)$$

可以看出, 增广协方差矩阵  $\tilde{\mathbf{R}}$  不仅包含协方差矩阵  $\mathbf{R}_{\mathbf{x},\mathbf{x}}$  信息, 而且蕴含 3 种伪协方差矩阵  $\mathbf{R}_{\mathbf{x},\mathbf{x}^{(i)}}$ ,  $\mathbf{R}_{\mathbf{x},\mathbf{x}^{(j)}}$  及  $\mathbf{R}_{\mathbf{x},\mathbf{x}^{(k)}}$  的全部信息, 并且  $\tilde{\mathbf{R}}$  为厄尔米特矩阵。

假设期望信号和干扰均为完全非圆<sup>[20-22]</sup>, 则

$$s_m^*(t) = e^{-j\psi_m} s_m(t) \quad (28)$$

式中,  $\psi_m \in [0, 2\pi)$  为  $s_m(t)$  的非圆相位。

结合式(17), 式(19)~ 式(21), 可得

其中,  $\lambda$  为拉格朗日乘子。将式(33)展开, 可得

$$\begin{aligned}
\ell(\mathbf{w}, \lambda) &= \mathbf{w}_r^T \tilde{\mathbf{R}}_r \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_i^T \tilde{\mathbf{R}}_i \mathbf{w}_i + \mathbf{w}_j^T \tilde{\mathbf{R}}_j \mathbf{w}_j \\
&+ \mathbf{w}_k^T \tilde{\mathbf{R}}_k \mathbf{w}_k - \mathbf{w}_r^T \tilde{\mathbf{R}}_i \mathbf{w}_i + \mathbf{w}_i^T \tilde{\mathbf{R}}_r \mathbf{w}_r \\
&- \mathbf{w}_j^T \tilde{\mathbf{R}}_i \mathbf{w}_k + \mathbf{w}_k^T \tilde{\mathbf{R}}_i \mathbf{w}_j \\
&- \mathbf{w}_r^T \tilde{\mathbf{R}}_j \mathbf{w}_j + \mathbf{w}_i^T \tilde{\mathbf{R}}_j \mathbf{w}_k + \mathbf{w}_j^T \tilde{\mathbf{R}}_j \mathbf{w}_r \\
&- \mathbf{w}_k^T \tilde{\mathbf{R}}_j \mathbf{w}_i - \mathbf{w}_r^T \tilde{\mathbf{R}}_k \mathbf{w}_k - \mathbf{w}_i^T \tilde{\mathbf{R}}_k \mathbf{w}_j \\
&+ \mathbf{w}_j^T \tilde{\mathbf{R}}_k \mathbf{w}_i + \mathbf{w}_k^T \tilde{\mathbf{R}}_k \mathbf{w}_r \\
&+ \mathbf{w}_r^T \mathbf{p}_r + \mathbf{w}_i^T \mathbf{p}_i + \mathbf{w}_j^T \mathbf{p}_j + \mathbf{w}_k^T \mathbf{p}_k \\
&+ i(\mathbf{w}_r^T \mathbf{p}_i - \mathbf{w}_i^T \mathbf{p}_r - \mathbf{w}_j^T \mathbf{p}_k + \mathbf{w}_k^T \mathbf{p}_j) \\
&+ j(\mathbf{w}_r^T \mathbf{p}_j + \mathbf{w}_i^T \mathbf{p}_k - \mathbf{w}_j^T \mathbf{p}_r - \mathbf{w}_k^T \mathbf{p}_i) \\
&+ k(\mathbf{w}_r^T \mathbf{p}_k - \mathbf{w}_i^T \mathbf{p}_j + \mathbf{w}_j^T \mathbf{p}_i - \mathbf{w}_k^T \mathbf{p}_r) \quad (34)
\end{aligned}$$

式中,  $\mathbf{w} = \mathbf{w}_r + i\mathbf{w}_i + j\mathbf{w}_j + k\mathbf{w}_k$ ,  $\tilde{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{R}}_r + i\tilde{\mathbf{R}}_i + j\tilde{\mathbf{R}}_j + k\tilde{\mathbf{R}}_k$ ,  $\mathbf{p} = \tilde{\mathbf{a}}_0 \lambda = \mathbf{p}_r + i\mathbf{p}_i + j\mathbf{p}_j + k\mathbf{p}_k$ 。由于,  $\tilde{\mathbf{R}}$  为厄尔米特矩阵, 所以

$$\tilde{\mathbf{R}}_r^T = \tilde{\mathbf{R}}_r \quad (35)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_i^T = -\tilde{\mathbf{R}}_i \quad (36)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_j^T = -\tilde{\mathbf{R}}_j \quad (37)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_k^T = -\tilde{\mathbf{R}}_k \quad (38)$$

由此可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\mathbf{w}, \lambda)}{\partial \mathbf{w}_r} &= 2(\tilde{\mathbf{R}}_r \mathbf{w}_r - \tilde{\mathbf{R}}_i \mathbf{w}_i - \tilde{\mathbf{R}}_j \mathbf{w}_j - \tilde{\mathbf{R}}_k \mathbf{w}_k) \\ &\quad + \mathbf{p}_r + i\mathbf{p}_i + j\mathbf{p}_j + k\mathbf{p}_k \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\mathbf{w}, \lambda)}{\partial \mathbf{w}_i} &= 2(\tilde{\mathbf{R}}_r \mathbf{w}_i + \tilde{\mathbf{R}}_i \mathbf{w}_r + \tilde{\mathbf{R}}_j \mathbf{w}_k - \tilde{\mathbf{R}}_k \mathbf{w}_j) \\ &\quad + \mathbf{p}_i - i\mathbf{p}_r + j\mathbf{p}_k - k\mathbf{p}_j \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\mathbf{w}, \lambda)}{\partial \mathbf{w}_j} &= 2(\tilde{\mathbf{R}}_r \mathbf{w}_j - \tilde{\mathbf{R}}_i \mathbf{w}_k + \tilde{\mathbf{R}}_j \mathbf{w}_r + \tilde{\mathbf{R}}_k \mathbf{w}_i) \\ &\quad + \mathbf{p}_j - i\mathbf{p}_k - j\mathbf{p}_r + k\mathbf{p}_i \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\mathbf{w}, \lambda)}{\partial \mathbf{w}_k} &= 2(\tilde{\mathbf{R}}_r \mathbf{w}_k + \tilde{\mathbf{R}}_i \mathbf{w}_j - \tilde{\mathbf{R}}_j \mathbf{w}_i + \tilde{\mathbf{R}}_k \mathbf{w}_r) \\ &\quad + \mathbf{p}_k + i\mathbf{p}_j - j\mathbf{p}_i - k\mathbf{p}_r \end{aligned} \quad (42)$$

进一步有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\mathbf{w}, \lambda)}{\partial \mathbf{w}} &= \frac{\partial \ell(\mathbf{w}, \lambda)}{\partial \mathbf{w}_r} + i \frac{\partial \ell(\mathbf{w}, \lambda)}{\partial \mathbf{w}_i} \\ &\quad + j \frac{\partial \ell(\mathbf{w}, \lambda)}{\partial \mathbf{w}_j} + k \frac{\partial \ell(\mathbf{w}, \lambda)}{\partial \mathbf{w}_k} \\ &= 2\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{w} + 4\mathbf{p} = 2\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{w} + 4\tilde{\mathbf{a}}_0\lambda \end{aligned} \quad (43)$$

其中, 有关 4 元数域偏导数的定义见参考文献[23]。

令式(43)中偏导为零, 即可得到问题式(32)的最优权矢量为

$$\mathbf{w}_{\text{WL-QMVDR}} = -2\tilde{\mathbf{R}}^{-1}\tilde{\mathbf{a}}_0\lambda \quad (44)$$

由于加权矢量需满足约束条件  $\mathbf{w}_{\text{WL-QMVDR}}^H \tilde{\mathbf{a}}_0 = 1$ , 代入式(44), 可知

$$\mathbf{w}_{\text{WL-QMVDR}} = \mu \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \tilde{\mathbf{a}}_0 \quad (45)$$

式中,  $\mu = (\tilde{\mathbf{a}}_0^H \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \tilde{\mathbf{a}}_0)^{-1}$ , 其值不影响波束形成器的输出信干噪比(SINR)。

进一步对增广协方差矩阵  $\tilde{\mathbf{R}}$  进行特征值分解, 可以得到

$$\tilde{\mathbf{R}} = \sum_{n=0}^M \xi_n \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^H + \sum_{n=M+1}^{4N-1} \xi_n \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^H \quad (46)$$

式中,  $\xi_n \in \mathbb{R}$  为  $\tilde{\mathbf{R}}$  的特征值,  $\mathbf{u}_n \in \mathbb{H}^{4N \times 1}$  为特征值  $\xi_n$  对应的特征向量, 而  $\{\xi_n\}_0^M$  为  $\tilde{\mathbf{R}}$  的  $M+1$  个大特征值。

由于  $\mathbf{u}_n^H \tilde{\mathbf{a}}_0 = 0, n = M+1, M+2, \dots, 4N-1$ , 将式(46)代入到式(45)中, 有

$$\mathbf{w}_{\text{WL-QMVDR}} = \mu \left( \sum_{n=0}^M \xi_n^{-1} \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^H \right) \tilde{\mathbf{a}}_0 \quad (47)$$

实际中, 可采用  $K$  个独立快拍数  $\{\mathbf{x}(t_k)\}_{k=1}^K \in \mathbb{H}^{N \times 1}$  估计增广协方差矩阵。

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{\mathbf{x}}(t_k) \tilde{\mathbf{x}}^H(t_k) \quad (48)$$

根据以上分析, 4 元数域对合增广宽线性自适

应波束形成方法的实现步骤可总结如下:

步骤 1 利用  $\mathbf{x}_1(t)$  和  $\mathbf{x}_2(t)$ , 构造 4 元数域阵列输出矢量  $\mathbf{x}(t)$ , 计算出  $\mathbf{x}(t)$  的 3 种对合矢量  $\mathbf{x}^{(i)}(t), \mathbf{x}^{(j)}(t)$  和  $\mathbf{x}^{(k)}(t)$ , 进而构造增广输出矢量  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_1(t) + i\mathbf{x}_2(t) \quad (49)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \left[ \mathbf{x}(t)^T \left[ \mathbf{x}^{(j)}(t) \right]^T \left[ \mathbf{x}^{(i)}(t) \right]^T \left[ \mathbf{x}^{(k)}(t) \right]^T \right]^T \quad (50)$$

步骤 2 利用增广输出矢量  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$  的  $K$  次独立快拍计算样本增广协方差矩阵  $\hat{\mathbf{R}}$ , 对  $\hat{\mathbf{R}}$  进行特征分解, 记其  $M+1$  个大特征值为  $\{\hat{\xi}_n\}_0^M$ , 对应的特征向量为  $\{\hat{\mathbf{u}}_n\}_0^M$ 。

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{\mathbf{x}}(t_k) \tilde{\mathbf{x}}^H(t_k) \quad (51)$$

$$\hat{\mathbf{R}} = \sum_{n=0}^M \hat{\xi}_n \hat{\mathbf{u}}_n \hat{\mathbf{u}}_n^H + \sum_{n=M+1}^{4N-1} \hat{\xi}_n \hat{\mathbf{u}}_n \hat{\mathbf{u}}_n^H \quad (52)$$

步骤 3 利用  $\mathbf{a}_{1,0}$  和  $\mathbf{a}_{2,0}$ , 构造期望信号的 4 元数域导向矢量  $\mathbf{a}_0$ , 计算出  $\mathbf{a}_0$  的 3 种对合矢量  $\mathbf{a}_0^{(i)}, \mathbf{a}_0^{(j)}$  和  $\mathbf{a}_0^{(k)}$ , 结合期望信号的非圆信息, 构造期望信号的增广导向矢量  $\tilde{\mathbf{a}}_0$ :

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_{1,0} + i\mathbf{a}_{2,0} \quad (53)$$

$$\tilde{\mathbf{a}}_0 = \left[ \mathbf{a}_0^T \left[ \mathbf{a}_0^{(j)} \right]^T \left[ \mathbf{a}_0^{(i)} e^{-j\psi_0} \right]^T \left[ \mathbf{a}_0^{(k)} e^{-j\psi_0} \right]^T \right]^T \quad (54)$$

步骤 4 结合步骤 2 和步骤 3, 计算 4 元数域对合增广宽线性自适应波束形成器的权矢量  $\mathbf{w}_{\text{WL-QMVDR}}$

$$\mathbf{w}_{\text{WL-QMVDR}} \propto \left( \sum_{n=0}^M \hat{\xi}_n^{-1} \hat{\mathbf{u}}_n \hat{\mathbf{u}}_n^H \right) \tilde{\mathbf{a}}_0 \quad (55)$$

步骤 5 计算 4 元数域对合增广宽线性自适应波束形成的输出

$$y(t_k) = \mathbf{w}_{\text{WL-QMVDR}}^H \tilde{\mathbf{x}}(t_k), k = 1, 2, \dots, K \quad (56)$$

## 4.2 计算复杂度分析

已知两个 4 元数相加需要 4 次实数加法运算, 两个 4 元数相乘需要 16 次实数乘法运算和 12 次实数加法运算。下面, 我们逐步对 4 元数域对合增广宽线性自适应波束形成中运算量进行分析。

步骤 1 计算  $\{\mathbf{x}(t_k)\}_1^K$  的每一种对合矢量需要  $8NK$  次实数乘法, 故构造 4 元数域增广输出矢量  $\{\tilde{\mathbf{x}}(t_k)\}_1^K$  需要  $24NK$  次实数乘法。

步骤 2 计算  $\hat{\mathbf{R}}$  中每一个元素需要  $16K$  次实数乘法、 $16K-4$  次实数加法和 4 次实数除法,  $\hat{\mathbf{R}}$  中共  $16N^2$  个元素, 故计算 4 元数域样本增广协方差矩阵  $\hat{\mathbf{R}}$  共需要  $256N^2K$  次实数乘法、 $256N^2K - 64N^2$  次实数加法以及  $64N^2$  次实数除法运算。对  $\hat{\mathbf{R}}$  进行特征分解时, 可以先得到其复表示矩阵, 再结合 QR 方法和向量迭代法对其复表示矩阵进行特征值求解, 假设取  $P$  步迭代, 这一运算需要的运算量为  $28672N^3P/3 - 2560N^2P + 192NP$ 。

步骤 3 计算  $\mathbf{a}_0$  的每一种对合矢量需要  $8N$  次实数乘法, 计算  $\mathbf{a}_0^{(i)}, \mathbf{a}_0^{(k)}$  与  $e^{-j\psi_0}$  的乘积时均需要  $8N$  次实数乘法和  $4N$  次实数加法, 故构造 4 元数域增广导向矢量  $\tilde{\mathbf{a}}_0$  需要  $40N$  次实数乘法和  $8N$  次实数加法。

步骤 4 计算权矢量  $\mathbf{w}_{\text{WL-QMVDR}}$ , 需要  $320N^2M + 576N^2$  次实数乘法和  $192N^2M + 448N^2 - 16N$  次实数加法。

步骤 5 计算波束形成输出需要  $64NK$  次实数乘法,  $64NK - 4K$  次实数加法。

### 5 仿真实验

本节将所提波束形成方法 WL-QMVDR 与现有 SWL-QPEP 方法<sup>[19]</sup>、QWCCB 方法<sup>[16]</sup>、QCAPON 方法<sup>[14]</sup>以及 WL-RCB 方法<sup>[21]</sup>进行比较, 此外, 4 元数模型最大可能 SINR(OPT-SINR1)、半宽线性模型下最大可能 SINR (OPT-SINR2)和对合增广模型下最大可能 SINR(OPT-SINR3)也作为性能基准出现在仿真图中。实验中, 采用交叉偶极子均匀线阵, 阵元间距为信号半波长, 阵元个数  $N = 6$ , 入射信号均为 BPSK 信号, 噪声为加性高斯白噪声。文献 [16]中参数  $\varepsilon$  和文献 [21]中  $\varepsilon_a$  均根据参考文献选择。所有实验均为 200 次蒙特卡洛独立实验仿真的结果。

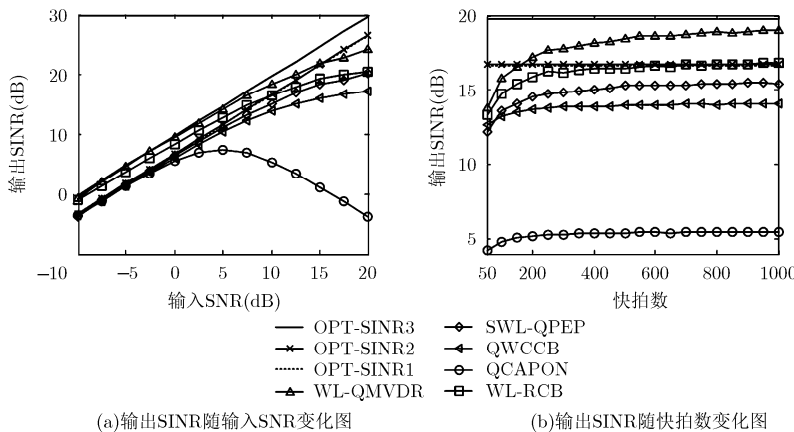
设有 1 个期望信号与 2 个非相干干扰从远场入射至阵列, 信干比为  $-20$  dB, 期望信号的方位角和俯仰角分别为  $(15^\circ, 38^\circ)$ , 极化辅助角和极化相位差分别为  $(43^\circ, 76^\circ)$ , 干扰信号的入射角及极化参数分别为  $(41^\circ, 83^\circ, 30^\circ, 35^\circ)$  和  $(60^\circ, 47^\circ, 35^\circ, 21^\circ)$ 。入射信号的非圆相位分别为  $10^\circ, 20^\circ$  和  $70^\circ$ 。假设期望信号的入射角和极化参数均存在  $2^\circ$  的角度误差。图 1(a)是快拍数固定为 500 的情况下, 指向误差和极化失配同时存在时输出 SINR 随输入 SNR 变化图。从图 1(a)可以看出 WL-QMVDR 方法输出 SINR 随输入 SNR

的增大而增大, 在相同 SNR 时, 输出 SINR 较优于其他方法。图 1(b)给出了 SNR 设置为 10 dB 时输出 SINR 随快拍数变化图, 快拍数从 50 变化到 1000。从图 1(b)可以看出在相同输入 SNR 的情况下, 对比其他算法, WL-QMVDR 方法对指向误差和极化失配有较好的鲁棒性, 且当快拍数大于 200 时, 可以超越 OPT-SINR2 和 OPT-SINR1。

为进一步分析期望信号导向矢量真实值和标称值之间夹角  $\alpha$ <sup>[26]</sup>变化对算法性能的影响, 图2给出输出 SINR 随  $\cos^2 \alpha$  的变化曲线。实验中, SNR 为 10 dB, 快拍数为 500。理论上真实导向矢量和标称的导向矢量之间夹角余弦越大, 二者夹角越小, 标称值越靠近真实值, 波束形成器输出 SINR 越大。从图 2 的仿真结果可以看出, 对比几种方法, WL-QMVDR 方法性能最优, 其对  $\alpha$  的变化最不敏感, QWCCB 和 SWL-QPEP 次之, 随误差的增大, WL-RCB 输出 SINR 性能明显下降, 而 QCAPON 对  $\alpha$  的变化最敏感, 当  $\alpha$  较大时, 输出性能 SINR 急剧下降。

接下来考虑阵列存在幅相误差的情况, 假设幅度误差满足  $[-0.03, 0.03]$  的均匀分布, 相位误差满足  $[-6^\circ, 6^\circ]$  的均匀分布。图 3(a)为采用 500 个快拍数时, 输出 SINR 随输入 SNR 的变化图。图 3(b)为输入 SNR 固定为 10 dB 时, 输出 SINR 随快拍数的变化曲线图。从图 3(a)中可以发现 WL-QMVDR 方法性能较 SWL-QPEP 方法、QWCCB 方法和 QCAPON 方法优势显著, 在低信噪比时, WL-QMVDR 方法和 WL-RCB 方法性能相当, 但随着 SNR 增大, WL-RCB 方法性能逐渐次于 WL-QMVDR 方法。此外, 从图 3(b)可以发现相同采样快拍数下 WL-QMVDR 方法输出 SINR 高于其他几种方法, 且随快拍数的增加, 性能逐渐趋于稳定。由此看出, WL-QMVDR 方法对幅相误差具有较好的鲁棒性。

最后分析 WL-QMVDR 方法对干扰的抑制能



(a)输出 SINR 随输入 SNR 变化图

(b)输出 SINR 随快拍数变化图

图 1 指向误差和极化失配同时存在时输出 SINR 随不同参量变化图

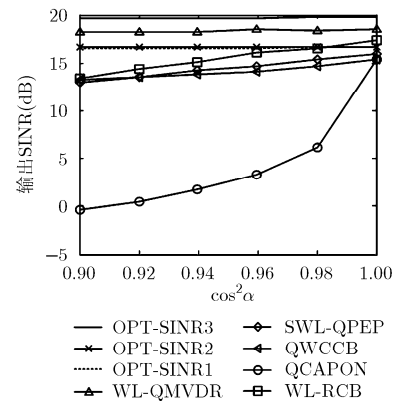
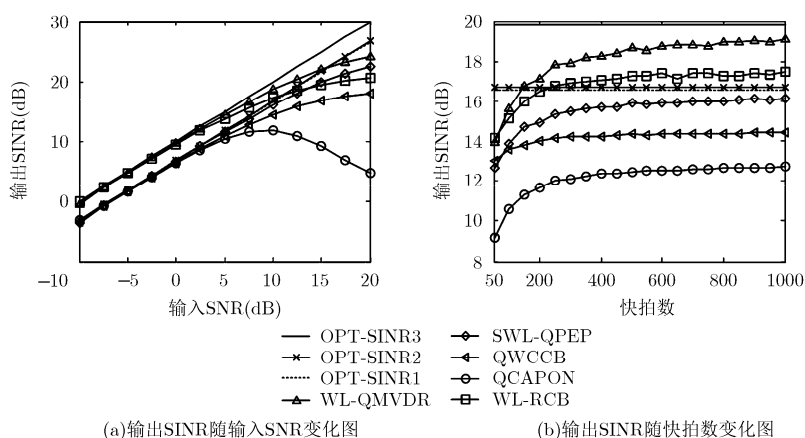


图 2 输出 SINR 随  $\cos^2 \alpha$  变化图

力。为绘制1维波束方向图，假定入射信号均为BPSK信号，非圆相位均为 $0^\circ$ ，方位角和极化参数相同，均为 $90^\circ, 15^\circ$ 和 $50^\circ$ 。期望信号的俯仰角为 $5^\circ$ 。输入SNR固定为10 dB，快拍数固定为500。假设阵列存在幅相误差，误差参数设置同上。图4为存在7个干扰信号，其俯仰角分别为 $30^\circ, 50^\circ, 70^\circ, -15^\circ, -30^\circ, -45^\circ$ 和 $-70^\circ$ 情况下波束方向图。仿真结果表明，在相同阵元个数的情况下，WL-QMVDR方法较常规4元数域波束形成器QCAPON，能够抑制更多个干扰，在各个干扰处均形成零陷，而且在期望信号处形成的主瓣宽度更窄。



(a)输出SINR随输入SNR变化图

(b)输出SINR随快拍数变化图

图 3 幅相误差存在时输出 SINR 随不同参量变化图

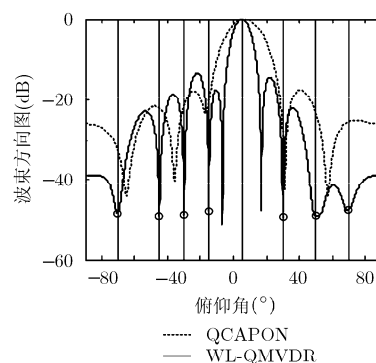


图 4 WL-QMVDR 方法和 QCAPON 方法的波束方向图

## 参考文献

- [1] LI J and STOICA P. Robust Adaptive Beamforming[M]. New York: Wiley, 2005: 1-410.
- [2] JIANG X, ZENG W, YASOTHARAN A, *et al.* Quadratically constrained minimum dispersion beamforming via gradient projection[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, 63(1): 192-205. doi: 10.1109/TSP.2014.2367464.
- [3] 刘子威, 苏洪涛, 胡勤振. 一种零陷展宽稳健旁瓣相消算法[J]. *电子与信息学报*, 2016, 38(3): 565-570. doi: 10.11999/JEIT150686.  
LIU Ziwei, SU Hongtao, and HU Qinzen. Robust sidelobes cancellation algorithm with null broadening[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(3): 565-570. doi: 10.11999/JEIT150686.
- [4] 李立欣, 白童童, 张会生, 等. 改进的双约束稳健 Capon 波束形成算法[J]. *电子与信息学报*, 2016, 38(8): 2014-2019. doi: 10.11999/JEIT151213.  
LI Lixin, BAI Tongtong, ZHANG Huisheng, *et al.* Improved double constraint robust Capon beamforming algorithm[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(8): 2014-2019. doi: 10.11999/JEIT151213.
- [5] RUAN H and DE LAMARE R C. Robust adaptive

## 6 结束语

本文提出一种基于 4 元数域对合增广和宽线性处理有机结合的自适应波束形成方法，即 WL-QMVDR 方法。WL-QMVDR 方法充分利用 4 元数域阵列输出矢量的对合信息和入射信号的非圆信息，具有优越的输出性能，甚至在一定条件下超越 4 元数域模型和半宽线性模型的最优输出性能。同时，WL-QMVDR 方法可实现阵列孔径扩展，较之常规方法能够抑制更多个干扰。

- beamforming based on low-rank and cross-correlation techniques[C]. Proceedings of IEEE 23rd European Signal Processing Conference, Nice, France, 2015: 3919-3932. doi: 10.1109/TSP.2016.2550006.
- [6] LI Y, MA H, YU D, *et al.* Iterative robust Capon beamforming[J]. *Signal Processing*, 2016, 118: 211-220. doi: 10.1016/j.sigpro.2015.07.004.
- [7] COMPTON R T. On the performance of a polarization sensitive adaptive array[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1981, 29(5): 718-725. doi: 10.1109/TAP.1981.1142651.
- [8] COMPTON R T. The tripole antenna: An adaptive array with full polarization flexibility[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1981, 29(6): 944-952. doi: 10.1109/TAP.1981.1142690.
- [9] NEHORAI A, HO K C, and TAN B T G. Minimum-noise-variance beamformer with an electromagnetic vector sensor[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1999, 47(3): 601-618. doi: 10.1109/78.747769.
- [10] MIRON S, BIHAN N L, and MARS J I. Quaternion-MUSIC for vector-sensor array processing[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, 54(4): 1218-1229. doi: 10.1109/

- TSP.2006.870630.
- [11] GONG X F, XU Y G, and LIU Z W. Quaternion ESPRIT for direction finding with a polarization sensitive array[C]. Proceedings of International Conference on Signal Processing, Beijing, China, 2008: 378-381. doi: 10.1109/ICOSP.2008.4697149.
- [12] BIHAN N L, MIRON S, and MARS J I. MUSIC algorithm for vector-sensors array using biquaternions[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, 55(9): 4523-4533. doi: 10.1109/TSP.2007.896067.
- [13] 李旦, 蒋景飞, 张建秋. 双四元数矢量传感器阵列模型和电磁源定位[J]. *电子学报*, 2011, 39(9): 1997-2003.  
LI Dan, JIANG Jingfei, and ZHANG Jianqiu. Biquaternion vector-sensor array model and electromagnetic source localization[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2011, 39(9): 1997-2003.
- [14] GOU X M, XU Y G, LIU Z W, *et al.* Quaternion-Capon beamformer using crossed-dipole arrays[C]. Proceedings of IEEE International Symposium on Microwave, Antenna, Propagation, and EMC Technologies for Wireless Communications, Beijing, China, 2011: 34-37. doi: 10.1109/MAPE.2011.6156140.
- [15] TAO J W and CHANG W X. A novel combined beamformer based on hypercomplex processes[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2013, 49(2): 1276-1289. doi: 10.1109/TAES.2013.6494413.
- [16] ZHANG X R, LIU W, XU Y G, *et al.* Quaternion-valued robust adaptive beamformer for electromagnetic vector-sensor arrays with worst-case constraint[J]. *Signal Processing*, 2014, 104(6): 274-283. doi: 10.1016/j.sigpro.2014.04.006.
- [17] JIANG M D, LIU W, and LI Y. Adaptive beamforming for vector-sensor arrays based on a reweighted zero-attracting quaternion-valued LMS algorithm[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2016, 63(3): 274-278. doi: 10.1109/TCSII.2015.2482464.
- [18] TOOK C C and MANDIC D P. A quaternion widely linear adaptive filter[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(8): 4427-4431. doi: 10.1109/TSP.2010.2048323.
- [19] ZHANG X R, LIU Z W, FAN Z Y, *et al.* Quaternion-valued robust adaptive beamformer based on widely linear processing[C]. Proceedings of the International Conference on Digital Signal Processing, Hong Kong, China, 2014: 719-724. doi: 10.1109/ICDSP.2014.6900758.
- [20] CHEVALIER P and BLIN A. Widely linear MVDR beamformers for the reception of an unknown signal corrupted by noncircular interferences[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, 55(11): 5323-5336. doi: 10.1109/TSP.2007.899394.
- [21] WANG G H, LIE J P, and SEE C M S. A robust approach to optimum widely linear MVDR beamformer[C]. Proceedings of the International Conference on Acoustic, Speech and Signal Processing, Kyoto, Japan, 2012: 2593-2596. doi: 10.1109/ICASSP.2012.6288447.
- [22] XU Y G, MA J Y, LIU Z W, *et al.* A class of diagonally loaded robust Capon beamformers for noncircular signals of interest[J]. *Signal Processing*, 2014, 94(1): 670-680. doi: 10.1016/j.sigpro.2013.07.013.
- [23] WARD J P. Quaternions and Cayley Numbers: Algebra and Applications[M]. Norwell, Massachusetts: Kluwer, 1997: 54-102.
- [24] TODD A E and STEPHEN J S. Quaternion involutions and anti-involutions[J]. *Computer and Mathematics with Applications*, 2007, 53(1): 137-143. doi: 10.1016/j.camwa.2006.10.029.
- [25] JIANG M D, LI Y, and LIU W. Properties of a general quaternion-valued gradient operator and its applications to signal processing[J]. *Frontiers of Information Technology and Electronic Engineering*, 2016, 17(2): 83-95. doi: 10.1631/FITEE.1500334.
- [26] LIU J, LIU W J, CHEN B, *et al.* Modified Rao test for multichannel adaptive signal detection[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 64(3): 714-725. doi: 10.1109/TSP.2015.2491892.
- 刘志文: 男, 1962年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为阵列信号处理及其应用、医学信号与图像处理等。
- 王 荔: 女, 1995年生, 硕士生, 研究方向为阵列信号处理及其应用。
- 徐友根: 男, 1975年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为阵列信号处理及其应用。