

## 瞬态信号双谱估计的一种新方法<sup>1</sup>

邓 革 陆 军 栗 毅 陆仲良

(国防科技大学电子工程学院 长沙 410073)

**摘 要** 瞬态信号的模型参数估计在许多领域占据相当重要的地位。本文利用高阶矩的性质, 提出一种  $Q$ -slice 马尔可夫 ARMA 模型双谱估计算法。仿真结果表明, 该方法估计精度高, 计算量小, 即使在低信噪比的情况下, 对瞬态信号也有较好的拟合效果。

**关键词** 瞬态信号, 双谱估计,  $Q$ -slice 算法, ARMA 模型, 马尔可夫模型

**中图分类号** TN911.7

### 1 引 言

在实际应用中, 经常会遇到由多个指数衰减余弦函数之和的形式组成的含噪瞬态信号。此类信号的模型参数估计问题引起了越来越广泛的重视。利用双谱的固有特性, 对高斯噪声具有抑制能力; 不需要知道噪声的概率密度, 也能在低信噪比 (SNR) 的情况下, 对信号进行检测、估计和重构。常规的双谱估计算法计算量太大, 难以实时处理<sup>[1,2]</sup>。本文提出一种计算量较小, 估计精度高的马尔可夫模型  $Q$ -slice 双谱估计算法。给出了仿真结果。

### 2 双谱分析简述

对于长度为  $N$ , 均值为零的三阶平稳随机过程  $\{x_n\}$ , 它的双谱密度函数为<sup>[2]</sup>

$$B(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R(m, n) \exp(-j\omega_1 m - j\omega_2 n), \quad (1)$$

其中  $R(m, n)$  为此随机过程的三阶矩, 且满足  $-\pi \leq \omega_1, \omega_2 \leq \pi$ 。

假定  $w(n)$  为系统的输入,  $x(n)$  是线性系统的输出, 设此系统为实 ARMA( $p, q$ ) 过程, 它的冲激响应为  $h(n)$ , 模型参数满足

$$\sum_{i=0}^p a_i x(n-i) = \sum_{i=0}^q b_i w(n-i), \quad a_0, b_0 = 1. \quad (2)$$

$Q$  为  $w(n)$  的功率谱密度,  $\beta$  为  $x(n)$  的三阶谱密度,  $x(n)$  的功率谱  $S(\omega)$  和双谱  $B(\omega_1, \omega_2)$  分别为

$$\begin{aligned} S(\omega) &= Q |H(\omega)|^2, \\ B(\omega_1, \omega_2) &= \beta H(\omega_1) H(\omega_2) H^*(\omega_1 + \omega_2). \end{aligned} \quad (3)$$

<sup>1</sup> 1996-11-04 收到, 1997-04-17 定稿

### 3 算法的导出

功率谱对高斯噪声的抑制能力不强, 它具有一定的局限。对于双谱而言, 经典估计法的估计方差大, 计算量大, 难以满足实际应用的需要; 采用模型参数双谱估计能较好地拟合瞬态信号<sup>[3]</sup>, 下面导出一种估计精度较高的 ARMA 模型双谱估计算法。

#### 3.1 Q-slice 算法

假设观察值为  $y(n)$ , 且  $y(n) = x(n) + u(n)$ ,  $u(n)$  是平稳有色高斯噪声, 与  $x(n)$  是独立的;  $x(n)$  是确知的瞬态信号, 可由一满足 (2) 式的 ARMA( $p, q$ ) 模型拟合。由于  $u(n)$  是高斯噪声, 它的三阶累积量为零, 则观察值  $y(n)$  与  $x(n)$  的累积量相等

$$C_{k,y}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-1}) = C_{k,x}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-1}). \quad (4)$$

只要模型的参数确定以后,  $x(n)$  就被确定。当输入是冲激函数  $\delta(n)$  时, (2) 式变为

$$\sum_{i=0}^p a_i h(n-i) = \sum_{i=0}^q b_i \delta(n-i) = b_n. \quad (5)$$

根据参考文献 [2],  $x(n)$  的  $k$  阶累积量与冲激响应  $h(n)$  的关系为

$$C_{k,x}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-1}) = \beta \sum_{n=0}^{\infty} h(n) h(n+\tau_1) \cdots h(n+\tau_{k-1}). \quad (6)$$

将 (6) 式化简可得 ARMA 模型输出的累积量与参数  $\{a_i\}_{i=0}^p$  和  $\{b_i\}_{i=0}^q$  的关系为

$$\sum_{i=0}^p a_i C_{k,x}(\tau_1 - i, \tau_1 - \tau_2, \dots, \tau_1 - \tau_{k-1}) = \beta \sum_{j=0}^{\infty} b_{j+\tau_1} h(j) h(j+\tau_1 - \tau_2) \cdots h(j+\tau_1 - \tau_{k-1}). \quad (7)$$

上式经过变量替换后化简为

$$f_k(t, \tau) = \sum_{i=0}^p a_i C_{k,x}(\tau - i, t, 0, \dots, 0), \quad (8)$$

$$f_k(t, \tau) = \beta \sum_{i=0}^q b_i h(i - \tau + t) h^{k-2}(i - \tau). \quad (9)$$

对于 (9) 式的右边而言, 当  $\tau > q$  时, 根据系统的假设条件,  $h(i - \tau) = 0$  ( $i \in [0, q]$ ), 我们得到一个仅与 ARMA 模型 AR 参数  $\{a_i\}_{i=0}^p$  有关的方程。

$$\sum_{i=0}^p a_i C_{k,x}(\tau - i, t, 0, \dots, 0), \quad \tau > q. \quad (10)$$

令  $\tau = q + 1, \dots, q + p + M$ , ( $M \geq 0$ ),  $t = -p, -p + 1, \dots, 0, 1, \dots, q$ , 当  $k = 3$  时, 得到一个基于一维对角片的 3 阶累积量正则方程, 由 (10) 式可求出 AR 参数  $\{a_i\}_{i=0}^p$ 。

当  $\tau = q$ ,  $k = 3$  时, (9) 式变为

$$f_3(t, q) = \beta \cdot b_q h(t). \quad (11)$$

当  $t = 0$  时,  $f_3(0, q) = \beta \cdot b_q$ ; 结合 (11) 式和 (8) 式, 就可求得系统的冲激响应为

$$h(t) = \frac{f_3(t, q)}{f_3(0, q)} = \frac{\sum_{i=0}^p a_i C_{3,x}(q-i, t)}{\sum_{i=0}^p a_i C_{3,x}(q-i, 0)}. \quad (12)$$

在获得 AR 参数  $\{a_i\}_{i=0}^p$  的基础上, 将  $t \in [1, 2, \dots, q]$  内的值分别代入 (12) 式能够求得  $h(n)$ , 将  $h(n)$  和  $\{a_i\}_{i=0}^p$  代入 (5) 式就得到 MA 参数值  $\{b_i\}_{i=0}^q$ .

$$b_i = \sum_{n=0}^p a_n h(i-n). \quad (13)$$

以上的推导过程是假定模型的阶次已知的条件下获得的。若阶次未知, 则判阶的过程将导致计算量大大增加, 下面我们根据阶次的判定情况提出马尔可夫模型。

### 3.2 马尔可夫模型

众所周知, 引入 ARMA 模型法进行双谱估计时, 将导致计算量的增加, 而且这个问题主要是由模型判阶复杂性增加所造成的。因为 ARMA 模型法涉及到 AR 部分判阶和 MA 部分的判阶。参考文献 [4] 所给出的判阶法计算量很大, 从而导致 ARMA 模型法的计算量远大于 AR 模型法和 MA 模型法。因此, 采用双谱估计 ARMA 模型算法后, 我们重点分析阶次对整个估计过程的影响。在 ARMA( $p, q$ ) 模型的判阶中, AR 部分的判阶理论较为成熟, MA 部分的判阶存在较大的困难。而且目前尚无比较好的解决方法。MA 部分的判阶运算量较大, 并且不能保证阶次估计的准确性。

根据参考文献 [3], 经过大量的仿真实验得到过这样的结论: ARMA 模型参数法对指数衰减余弦序列数据拟合具有多样性。就是说在最佳阶次附近的一个较宽的范围内, ARMA 双谱估计模型算法都能得到较好的拟合效果, 拟合误差较小。所以, 我们引入了一个马尔可夫 ARMA( $p, p-1$ ) 模型来拟合指数衰减余弦序列。也就是说, 对于一组观测数据, 用参考文献 [4] 所介绍的判阶法估计出 AR 部分阶次  $p$ , 然后取其 MA 部分的阶次为  $q = p-1$ 。显然 ARMA( $p, p-1$ ) 将二元变量 ( $p, q$ ) 一元化, 模型阶次从二维平面选点变为直线 ( $p, p-1$ ) 上选点, 显然其计算量比普通的 ARMA( $p, q$ ) 模型双谱估计要小得多。例如对于阶次为 (5,4) 的 ARMA 模型, 如果 AR 部分阶次从 1 开始对数据进行拟合, 用 ( $p, p-1$ ) 斜线选阶, 仅五步即可达到, 而用 ( $p, q$ ) 格点选阶要经过几十步。对于阶次 ( $p, q$ ) 不满足 ( $p, p-1$ ) 形式的数据序列, 由于 ARMA 模型拟合的多样性, 在满足一定精度的条件下, 采用 ARMA( $p, p-1$ ) 形式对之拟合也是可能的。

### 3.3 算法流程

(1) 计算出给定数据的三阶矩, 根据参考文献 [4] 确定 ARMA 模型的阶次  $p$ , 根据马尔可夫模型令  $q = p-1$ 。

(2) 求解 (10) 式, 获得 AR 参数  $\{a_i\}_{i=0}^p$ 。

(3) 将 AR 参数  $\{a_i\}_{i=0}^p$ , 代入 (12) 式, 求得冲激响应  $h(n)$ 。

(4) 将  $\{a_i\}_{i=0}^p$  和  $h(n)$  代入 (13) 式, 就可得到 MA 参数  $\{b_i\}_{i=0}^q$ 。

(5) 重组数据序列  $\hat{x}(n)$ , 检验估计精度, 如果均方误差较大, 则调整模型的阶次, 从第 2 步重新做起。

#### 4 仿真结果及分析

选用以下三组具有不同参数值的指数衰减余弦序列:

$$\text{第一组数据 } x(t) = 0.2 \cos(\pi t/4)(e^{-t} + 2e^{-0.14t} + 2e^{-0.18t}), \quad (14)$$

$$\text{第二组数据 } x(t) = 0.25 \cos(\pi t/4)(e^{-0.2t} + e^{-0.4t}) + 0.5 \cos(\pi t/8)e^{-t}, \quad (15)$$

$$\text{第三组数据 } x(t) = (1/3)[\cos(\pi t/3)e^{-0.3t} + (1/3)\cos(\pi t/6)e^{-0.6t} + (1/3)\cos(\pi t/9)e^{-0.9t}]. \quad (16)$$

利用本文提出的算法, 得到它们的马尔可夫模型阶次分别为 (3,2)、(4,3)、(4,3), 数据在不加噪声的情况下, 得到模拟重组信号与原始数据的对照比较图; 然后, 在信噪比为 10dB 时, 分别进行 15 次相互独立的仿真实验. 图 1、图 3 和图 5 分别是三组数据不加噪声时模拟重组信号与原始数据 (虚线代表重组信号, 实线代表原始信号) 的对照比较, 图 2、图 4 和图 6 为加上噪声以后相互独立 15 次仿真的结果.

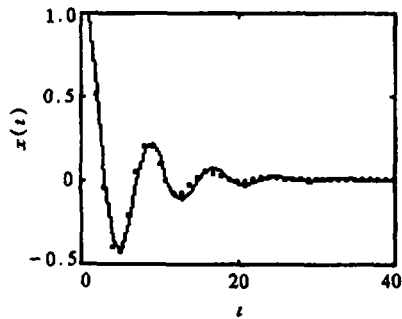


图 1

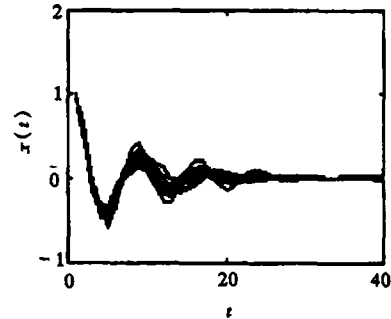


图 2

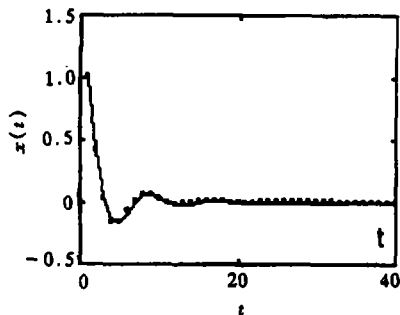


图 3

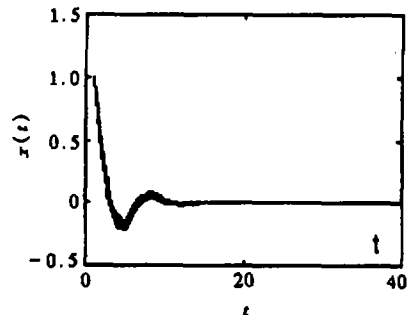


图 4

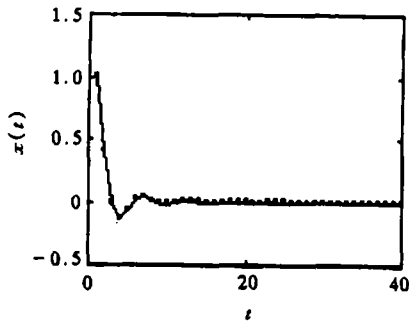


图 5

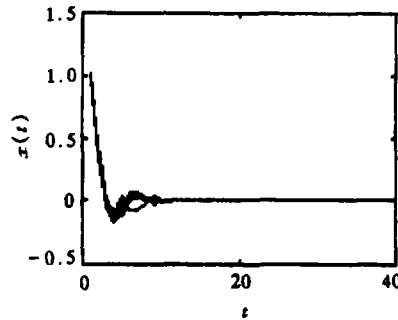


图 6

表 1 给出了三组数据 15 次相互独立仿真实验所得结果统计平均后的方差和均方误差。

表 1

数据	第一组	第二组	第三组
方差	$5.4 \times 10^{-3}$	$7.2 \times 10^{-3}$	$2.7 \times 10^{-3}$
均方误差	$5.6528 \times 10^{-4}$	$9.2471 \times 10^{-4}$	$6.5619 \times 10^{-4}$

从表 1 可以看出三组数据所得到估计的精度和收敛性都比较好。维持了较高的估计精度。相对于其它的算法来说, 计算量得到了大大的降低。我们以第一组数据为例, 由判别法得到阶次为 (2,2), 模型的最佳阶次为 (3,3), 若将阶次逐渐调整到最佳阶次, 中间至少要经历 5 次不同的阶次运算。其计算机浮点运算次数为 346654 次; 但是, 对于 ARMA 马尔可夫模型来说, 只需要 2 次运算就可以得到满足一定估计精度的拟合结果。计算机浮点运算次数为 107303 次, 可见运算量大大减少, 当数据更为复杂、模型阶次更高时, 效果将更加明显。综上所述, 马尔可夫 Q-slice 瞬态信号双谱估计算法既保持了较高的估计精度, 又大大提高了运算速度, 便于实时处理, 具有较好的应用前景。

## 5 结 论

本文对瞬态信号的 ARMA 参数模型法双谱估计作了较为全面的分析, 提出了马尔可夫模型 Q-slice 双谱估计算法。仿真结果表明, 在保持较高的估计精度的同时, 运算量得到了大大降低。在瞬态信号的估计领域, 不失为一种有效的方法。

## 参 考 文 献

- [1] Subba Rao T, Gabr M M. An Introduction to Bispectral Analysis and Bilinear Time Series Models. New York: Seringer-Verilag, 1984.
- [2] Nikias C L, Raghuveer M. Bispectrum estimation: A digital signal processing framework. Proc. IEEE, 1987, 75(7): 869-891.
- [3] 陆 军, 双谱在冲激雷达信号处理中的应用: [硕士论文], 长沙: 国防科技大学, 1996.
- [4] Giannakis G B, Mendel J M. Cumulant-based order determination of non-Gaussian ARMA model, IEEE Trans. on Acoust, Speech, Signal Processing, 1990, ASSP-38(8): 1411-1423.

## A NEW METHOD OF BISPECTRAL ESTIMATION FOR TRANSIENT SIGNAL

Deng Ge    Lu Jun    Su Yi    Lu Zhongliang

(*National University of Defence Technology, Changsha 410073*)

**Abstract** Estimation of model parameter for transient signal is very important in many aspects. This paper presents a new Markov ARMA model  $Q$ -slice estimation algorithm of transient signal based on bispectrum. Simulation results show that this new method has some special features, such as higher estimation precision, lower amount of calculation, higher fitting effect even in lower signal-to-noise ratio (SNR) situation.

**Key words** Transient signal, Bispectral estimation,  $Q$ -slice algorithm, ARMA model, Markov model

邓 革： 男，1967 年生，博士，主要从事雷达信号处理的研究。

陆 军： 男，1970 年生，博士生，主要从事图象处理的研究。

粟 毅： 男，1961 年生，副教授，主要从事超宽带雷达系统、SAR 成像技术等方面的研究。

陆仲良： 男，1931 年生，教授，博士生导师，现主要从事超宽带雷达系统、信号处理等方面的研究。