利用双尺度相似变换构造高逼近阶的双正交多低通滤波器 [1]

张 彬 王军锋 宋国乡

(西安电子科技大学理学院 西安 710071)

摘 要: 该文给出了利用分形插值函数构造多尺度函数的推导方法，对多低通滤波器 $H_0(z)$ 通过计算知 $\det H_0(z)$ 和 $\det H_0(-z)$ 没有公共根，利用双正交多低通滤波器的精确重构条件，得到了 $H_0(z)$ 的对偶滤波器 $F_0(z)$．为了使 $H_0(z)$ 的对偶具有较高逼近阶，对 $H_0(z)$ 作双尺度相似变换，得到了 $H_0^{\mathrm{new}}(z)$ 和它的对偶 $F_0^{\mathrm{new}}(z)$，对 $F_0^{\mathrm{new}}(z)$ 作相应的反变换，就得到了 $H_0(z)$ 的具有高逼近阶的对偶滤波器.

关键词: 分形插值函数，尺度函数的逼近阶，双尺度相似变换，双正交多尺度函数

中图分类号: TN911.7, TN713 **文献标识码**: A **文章编号**: 1009-5896(2003)12-1658-06

Using TST Constructing Biorthogonal Low Pass Multi-filters with Higher Approximation Order

Zhang Bin Wang Jun-feng Song Guo-xiang

(*School of Science, Xidian University, Xi'an* 710071, *China*)

Abstract This paper presents a detailed method on constructing multi-scaling functions with fractal interpolation functions, then calculates that $\det H_0(z)$ and $\det H_0(-z)$ have no common roots, and obtains $F_0(z)$ the dual low pass multi-filter of $H_0(z)$ with the perfect reconstruction condition of biorthogonal low pass multi-filters. In order to construct the dual low pass multi-filter of $H_0(z)$ with higher approximation order, the two-scale similarity transform is taken for $H_0(z)$, then and its dual $H_0^{\mathrm{new}}(z)$ is obtained. After applying corresponding inverse transform to $F_0^{\mathrm{new}}(z)$, the dual low pass multi-filter of $H_0(z)$ with higher approximation order is achieved.

Key words Fractal interpolation functions, The approximation order of multi-scaling functions, Two-scale Similarity Transform(TST), Biorthogonal multi-scaling functions

1 分形插值函数和多尺度函数的构造

设 $B(I)$ 表示 $[0,1]$ 上的有界实函数所成的巴拿赫空间，$\beta = B(I)\otimes B(I)$，令 $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1) \in \beta$，定义 $B(I)$ 上的映射 Φ_λ 为

$$\Phi_\lambda(f)(x) = \begin{cases} \lambda_0(2x) + sf(2x), & x \in [0, 1/2) \\ \lambda_1(2x-1) + sf(2x-1), & x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

当 $|s| < 1$ 时，Φ_λ 是 $B(I)$ 上的压缩映射，假定 λ_i 是连续的，Φ_λ 满足 $\lambda_0(1) + sf(1) = \lambda_1(0) + sf(0)$，那么压缩映射 Φ_λ 的唯一的不动点 $f_\lambda \in B(I)$，称为一个分形插值函数.

设 π_2 是 $[0,1]$ 上次数不超过 2 的多项式集合，$\Pi_2 = \pi_2 \otimes \pi_2$，$f(x) \in C^1(I)$，$\lambda = (\lambda_0, \lambda_1) = (a_{00} + b_{00}x + c_{00}x^2, a_{01} + b_{01}x + c_{01}x^2)$，则 $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1)$ 等价于向量 $v = (a_{00}, b_{00}, c_{00}, a_{01}, b_{01}, c_{01})$，

[1] 2002-06-07 收到，2002-12-27 改回

λ 对应的分形插值函数 f_λ 为

$$f_\lambda(f)(x)=\begin{cases}\lambda_0(2x)+sf_\lambda(2x), & x\in[0,1/2)\\ \lambda_1(2x-1)+sf_\lambda(2x-1), & x\in[1/2,1]\end{cases} \tag{2}$$

对上式求导，得

$$f'_\lambda(f)(x)=\begin{cases}2\lambda_0(2x)+2sf'_\lambda(2x), & x\in[0,1/2)\\ 2\lambda_1(2x-1)+2sf'_\lambda(2x-1), & x\in[1/2,1]\end{cases} \tag{4}$$

由 f_λ 和 f'_λ 在 1/2 的连续性得

$$(1-s)(\lambda_1(0)-\lambda_0(1))+s(\lambda_0(0)-\lambda_1(1))=0 \tag{5}$$

$$(1-2s)(\lambda'_2(0)-\lambda'_1(1))+2s(\lambda'_1(0)-\lambda'_2(1))=0 \tag{6}$$

$g=\theta(\lambda)\in C^1(I)$ 当且仅当 $\lambda=(\lambda_0,\lambda_1)$ 满足式 (5), (6) .

显然 $\dim(\theta(\pi_2\otimes\pi_2)\cap C^1(I))=4$, 对于任意的 $g\in\theta(\pi_2\otimes\pi_2)\cap C^1(I)$, g 由 $g(0)$, $g'(0)$, $g(1)$, $g'(1)$ 唯一决定，用式 (3)-(6) 可以求出 g 所对应的 λ .

由于 $\dim(\theta(\pi_2\otimes\pi_2)\cap C^1(I))=4$, 特别地选择 g_1,g_2,g_3,g_4 作为其基底，满足

$g_1(0)=1,g_1(1)=0,g'_1(0)=0,g'_1(1)=0;\quad g_2(0)=0,g_2(1)=0,g'_2(0)=1,g'_2(1)=0;$

$g_3(0)=0,g_3(1)=1,g'_3(0)=0,g'_3(1)=0;\quad g_4(0)=0,g_4(1)=0,g'_4(0)=0,g'_4(1)=1.$

显然满足上述条件的 g_1,g_2,g_3,g_4 构成 $\theta(\pi_2\otimes\pi_2)\cap C^1(I)$ 的一组基. 这 4 个基元素对应于 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 。通过简单计算得

$\lambda_1=(1-s,0,s-1/2,1/2-s,1/2-s,2s-1),\quad \lambda_2=(0,1/2-s,s-3/8,1/8,-1/4,1/8),$

$\lambda_3=(0,0,1/2-s,1/2,1-2s,s-1/2),\quad \lambda_4=(0,0,s-3/8,s-1/4,-s,1/4).$

下面具体构造多小波的尺度函数，令 $\lambda_i^1=\begin{cases}\lambda_3, & i=-1\\ \lambda_1, & i=0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$; $\lambda_i^2=\begin{cases}\lambda_4, & i=-1\\ \lambda_2, & i=0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

设 $\lambda^1=(\cdots0,\lambda_3,\lambda_1,0\cdots)$ 和 $\lambda^2=(\cdots0,\lambda_4,\lambda_2,0\cdots)$ 对应的分形插值函数分别为 $\phi^1(x)$ 和 $\phi^2(x)$, 那么

$$\phi^1(x)=(\tau\circ\theta)(\lambda^1)=f_{\lambda_3}(x+1)\chi_{[-1,0)}+f_{\lambda_1}(x)\chi_{[0,1)}$$

$$\phi^2(x)=(\tau\circ\theta)(\lambda^2)=f_{\lambda_4}(x+1)\chi_{[-1,0)}+f_{\lambda_2}(x)\chi_{[0,1)}$$

其中 $(\tau\circ\theta)(\lambda)=\tau(\theta(\lambda))$, 映射 τ 和 θ 定义见文献 [1], 显然 $\mathrm{supp}\phi^1$, $\mathrm{supp}\phi^2\subseteq[-1,1]$, 并且 $\phi^1(0)=(\phi^2)'(0)=1$, $(\phi^1)'(0)=\phi^2(0)=0$, 那么对于 V_0 中的任一函数 $f(x)$, $f(x)$ 由 $\{(f(l),f'(l))\}_{l\in Z}$ 唯一确定，从而 $f(x)$ 可表示为 $f(x)=\sum_{l\in Z}(f(l)\phi^1(x-l)+f'(l)\phi^2(x-l))$, $x\in R$.

令 $\phi(x)=(\phi^1(x),\phi^2(x))^T$, 现在利用上式来写出尺度函数 $\phi(x)$ 的加细方程.

由于

$$\begin{aligned}\phi^1(x)&=f_{\lambda_3}(x+1)\chi_{[-1,0)}+f_{\lambda_1}(x)\chi_{[0,1]}\\
&=f_{\lambda_3}(x+1)\chi_{[-1,1/2)}+f_{\lambda_3}(x+1)\chi_{[-1/2,0)}+f_{\lambda_1}(x)\chi_{[0,1/2)}+f_{\lambda_1}(x)\chi_{[1/2,1]}\\
&=[\lambda_{30}(2x+2)+sf_{\lambda_3}(2x+2)]\chi_{[-1,-1/2)}+[\lambda_{31}(2x+1)+sf_{\lambda_3}(2x+1)]\chi_{[-1/2,0)}\\
&\quad+[\lambda_{10}(2x)+sf_{\lambda_1}(2x)]\chi_{[0,1/2)}+[\lambda_{11}(2x-1)+sf_{\lambda_1}(2x-1)]\chi_{[1/2,1]}\\
&=([\lambda_{30}(\cdot)+sf_{\lambda_3}(\cdot)]\chi_{[0,1)})(2x+2)+([\lambda_{31}(\cdot)+sf_{\lambda_3}(\cdot)]\chi_{[0,1)})(2x+1)\\
&\quad+([\lambda_{10}(\cdot)+sf_{\lambda_1}(\cdot)]\chi_{[0,1)})(2x)+([\lambda_{11}(\cdot)+sf_{\lambda_1}(\cdot)]\chi_{[0,1]})(2x-1)\end{aligned}$$

令 $$h_1(x) = (\lambda_{30}(x) + sf_{\lambda_3}(x))\chi_{[0,1)}, \quad h_2(x) = (\lambda_{31}(x) + sf_{\lambda_3}(x))\chi_{[0,1)},$$
$$h_3(x) = (\lambda_{10}(x) + sf_{\lambda_1}(x))\chi_{[0,1)}, \quad h_4(x) = (\lambda_{11}(x) + sf_{\lambda_1}(x))\chi_{[0,1]}.$$

那么 $h_i(x) \in C^1(I)$, 从而由 $h_i(0), h_i(1), h_i'(1)(i = 1,2,3,4)$ 唯一决定，于是有

$$h_i(x) = h_i(0)\phi^1(x) + h_i'(0)\phi^2(x) + h_i(1)\phi^1(x-1) + h_i'(1)\phi^2(x-1)$$

通过简单计算得 $h_1(0) = 0,\ h_1'(0) = 0,\ h_1(1) = 1/2,\ h_1'(1) = 1-2s$. 于是 $h_1(x) = (1/2)\phi^1(x-1) + (1-2s)\phi^2(x-1)$. 利用类似的方法可计算出 $h_2(x) = (1/2)\phi^1(x) + (1-2s)\phi^2(x) + \phi^1(x-1)$, $h_3(x) = \phi^1(x) + (1/2)\phi^1(x-1) + (2s-1)\phi^2(x-1)$, $h_4(x) = (1/2)\phi^1(x) + (2s-1)\phi^2(x)$.

由于经过平移压缩之后， $h_i(x), (i = 1,2,3,4)$ 在端点的函数值和导数值加倍，所以

$$\begin{aligned}\phi^1(x) &= \frac{1}{2}(h_1(2x+2) + h_2(2x+1) + h_3(2x) + h_4(2x-1)\\ &= \frac{1}{2}\phi^1(2x+1) + (1-2s)\phi^2(2x+1) + \phi^1(2x) + \frac{1}{2}\phi^1(2x-1) + (2s-1)\phi^2(2x-1)\end{aligned}$$

类似地， $$\begin{aligned}\phi^2(x) &= f_{\lambda_4}(x+1)\chi_{[-1,0)} + f_{\lambda_2}(x)\chi_{[0,1]}\\ &= f_{\lambda_4}(x+1)\chi_{[-1,-1/2)} + f_{\lambda_4}(x+1)\chi_{[-1/2,0)} + f_{\lambda_2}(x)\chi_{[0,1/2)} + f_{\lambda_2}(x)\chi_{[1/2,1]}\\ &= \{[\lambda_{40}(\cdot) + sf_{\lambda_4}(\cdot)]\chi_{[0,1)}\}(2x+2) + \{[\lambda_{41}(\cdot) + sf_{\lambda_4}(\cdot)]\chi_{[0,1)}\}(2x+1)\\ &\quad + \{[\lambda_{20}(\cdot) + sf_{\lambda_2}(\cdot)]\chi_{[0,1)}\}(2x) + \{[\lambda_{21}(\cdot) + sf_{\lambda_2}(\cdot)]\chi_{[0,1]}\}(2x-1)\end{aligned}$$

显然 $[\lambda_{40}(x)+sf_{\lambda_4}(x)]\chi_{[0,1)}, [\lambda_{41}(x)+sf_{\lambda_4}(x)]\chi_{[0,1)}, [\lambda_{20}(x)+sf_{\lambda_2}(x)]\chi_{[0,1)}, [\lambda_{21}(x)+sf_{\lambda_2}(x)]\chi_{[0,1]}$ 都属于 $C^1(I)$, 都由它们在端点 0, 1 的函数值和导数值唯一决定．用类似的方法可得

$$\phi^2(x) = \frac{1}{8}\phi^1(2x+1) + \left(s - \frac{1}{4}\right)\phi^2(2x+1) + \frac{1}{2}\phi^2(2x) + \frac{1}{8}\phi^1(2x-1) + \left(\frac{1}{4} - s\right)\phi^2(2x-1)$$

从而多尺度函数的加细方程为

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1-2s \\ -1/8 & s-1/4 \end{pmatrix}\phi(2x+1) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\phi(2x) + \begin{pmatrix} 1/2 & 2s-1 \\ 1/8 & 1/4-s \end{pmatrix}\phi(2x-1)$$

尺度函数 $\phi(x)$ 相应的滤波器 $H_0(\omega)$ 为

$$H_0(\omega) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1/2 & 1-2s \\ -1/8 & s-1/4 \end{pmatrix}e^{i\omega} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 2s-1 \\ 1/8 & 1/4-s \end{pmatrix}e^{-i\omega}\right)$$

当 $s = 1/4$ 时， $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/8 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/8 & 0 \end{pmatrix}$, 所以 $\phi^1(x)$ 关于原点对称， $\phi^2(x)$ 关于原点反对称． $H_0(\omega)$ 的表示为

$$H_0(\omega) = \begin{pmatrix} e^{i\omega}/4 + 1/2 + e^{-i\omega}/4 & e^{i\omega}/4 - e^{-i\omega}/4 \\ -e^{i\omega}/16 + e^{-i\omega}/16 & 1/4 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 4e^{i\omega} + 8 + 4e^{-i\omega} & 4e^{i\omega} - 4e^{-i\omega} \\ -e^{i\omega} + e^{-i\omega} & 4 \end{pmatrix}$$

$H_0(0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1/4\end{pmatrix}$, $H_0(\pi)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1/4\end{pmatrix}$, 令 $u=(1,0)$, 那么 $uH_0(0)=u$, $uH_0(\pi)=0$, 则 $\phi(x)$ 的逼近阶至少为 1[2]．

2 双正交尺度函数的构造

设 $\phi(x)=(\phi_1(x),\phi_2(x))$ 是多尺度函数，它的对偶尺度函数为 $\tilde{\phi}(x)=(\tilde{\phi}_1(x),\tilde{\phi}_2(x))^{\mathrm{T}}$，它们分别满足加细方程：

$$\phi(x)=2\sum_k h_0(k)\phi(2x-k) \tag{7}$$

$$\tilde{\phi}(x)=2\sum f_0(k)\tilde{\phi}(2x-k) \tag{8}$$

其中 $h_0(k)$, $f_0(k)$ 是二阶方阵，同时满足对偶性条件：

$$\langle\phi(x-k),\tilde{\phi}^*(x-l)\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x-k)\tilde{\phi}^*(x-l)\mathrm{d}x=\delta_{k,l}I,\qquad k,l\in Z,\quad I\text{是二阶单位阵} \tag{9}$$

式 (7), (8) 在频率域上的表示为 $\hat{\phi}(\omega)=H_0(\omega/2)\hat{\phi}(\omega/2)$, $\hat{\tilde{\phi}}(\omega)=F_0(\omega/2)\hat{\tilde{\phi}}(\omega/2)$, 其中 $H_0(\omega)=\sum_k h_0(k)e^{-ik\omega}$, $F_0(\omega)=\sum_k f_0(k)e^{-ik\omega}$． (9) 式在频率域上的表示为 $H_0(\omega)F_0^*(\omega)+H_0(\omega+\pi)F_0^*(\omega+\pi)=I$, 令 $z=e^{-i\omega}$, 则有

$$H_0(z)F_0^*(z)+H_0(-z)F_0^*(-z)=I \tag{10}$$

在频率域上由 $H_0(z)$ 出发构造出 $F_0(z)$, $H_0(z)$ 要满足一定的条件.

定理 1[3]　如果 $H_0(z)$ 和 $H_0(-z)$ 的行列式没有相同的根，那么存在矩阵多项式 $F_0(z)$ 满足方程式 (10)．

上节利用分形插值函数构造的多尺度函数 $\phi(x)$, 其掩模 $H_0(z)$ 的表示式为

$$H_0(z)=\begin{pmatrix}1/(4z)+1/2+z/4 & 1/4z-z/4\\ -1/(16z)+z/16 & 1/4\end{pmatrix}$$

而 $\det H_0(z)=(1/(64z^2))(1+4z+6z^2+4z^3-z^4)$, $\det H_0(-z)=(1/(64z^2))(1-4z+6z^2-4z^3-z^4)$ 利用辗转相除法容易验证上式中的两个多项式是互素的，从而 $\det H_0(z)$ 和 $\det H_0(-z)$ 没有相同的根．现在来求解 $F_0(z)$, 使得 $F_0(z)$ 和 $H_0(z)$ 满足式 (10)．

设 $F_0(z)=\begin{pmatrix}a_1z^{-1}+a_2+a_3z & b_1z^{-1}+b_2+b_3z\\ c_1z^{-1}+c_1+c_3z & d_1z^{-1}+d_2+d_3z\end{pmatrix}$, 将其带入式 (10), 得 $F_0(z)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, 显然这不是理想的对偶滤波器，因为 $F_0(z)$ 有一个大于 1 的特征值，为了得到满意的结果，先对尺度函数 $\phi(x)$ 作双度相似变换，以提高其逼近阶，然后对高逼近阶的尺度函数求其对偶，最后对对偶滤波器做反变换，就可得到比较满意的多尺度函数.

定理 2[1]　假设 $H_0(z)$ 是尺度函数的掩模，选择适当的双尺度变换矩阵 $M(z)$, 对 $H_0(z)$ 作双尺度相似变换，令 $H_0^{\mathrm{new}}(z)=(1/2)M(z^2)H_0(z)M^{-1}(z)$, 若 $H_0^{\mathrm{new}}(z)$ 和 $F_0^{\mathrm{new}}(z)$ 满足 (10) 式，那么 $H_0(z)$ 和 $F_0(z)$ 也满足 (10) 式，其中 $F_0(z)=(1/2)(M(z^2))^*F_0^{\mathrm{new}}(z)(M^{-1}(z))^*$．

由定理 2, 对 $H_0(z)$ 作双尺度相似变换，选择变换矩阵 $M(z)=\begin{pmatrix}1-z & 1+z\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, 这样选择的 $M(z)$ 符合双尺度相似变换的一切条件 [4], 令 $H_0^{\mathrm{new}}(z)=(1/2)M(z^2)H_0(z)M^{-1}(z)$, 通过计

算得

$$H_0^{\text{new}}(z)=\frac{1}{32}\begin{pmatrix}3z^{-1}+11+11z+3z^2 & z^{-1}-10-30z-10z^2+z^3\\ -z^{-1}-z & z^{-1}+6+z\end{pmatrix}$$

显然 $H_0^{\text{new}}(z)$ 比 $H_0(z)$ 有较高的逼近阶，下面来求 $H_0^{\text{new}}(z)$ 的对偶 $F_0^{\text{new}}(z)$ 。令

$$F_0^{\text{new}}(z)=\begin{pmatrix}a_1z^{-3}+a_2z^{-2}+a_3z^{-1}+a_4+a_5z & c_1z^{-3}+c_2z^{-2}+c_3z^{-1}+c_4+c_5z\\ b_1z^{-3}+b_2z^{-2}+b_3z^{-1}+b_4+b_5z & d_1z^{-3}+d_2z^{-2}+d_3z^{-1}+d_4+d_5z\end{pmatrix}$$

将 $H_0^{\text{new}}(z)$ 和 $F_0^{\text{new}}(z)$ 代入式 (10), 通过计算并化简得到以下的线性方程组:

$$a_1=b_1=c_1=d_1=0 \qquad a_5=b_5=c_5=d_5=0$$

$$\begin{cases}3a_2-10c_2+c_3=0\\ 11a_2+11a_3+3a_4-10c_2-30c_3-10c_4=0\\ 3a_3+11a_4+c_3-10c_4=16\end{cases}\qquad \begin{cases}3b_2-10d_2+d_3=0\\ 11b_2+11b_3+3b_4-10d_2-30d_3-10d_4=0\\ 3b_3+11b_4+d_3-10d_4=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}6c_2+c_3-a_3=0\\ c_3+6c_4-a_3=0\end{cases}\qquad \begin{cases}6d_2+d_3-b_3=0\\ d_3+6d_4-b_3=16\end{cases}$$

这些方程组有 10 个方程，12 个未知数, 由后两个方程组可得 $\begin{cases}c_4=c_2\\ d_4=d_2+8/3\end{cases}$; $\begin{cases}a_3=6c_2+c_3\\ b_3=6d_2+d_3\end{cases}$ 从而方程组可进一步化简为 6 个方程， 8 个未知数, 选择 a_2 和 b_2 作为自由参变量, 通过计算得

$$c_2=49a_2/108+1/36,\qquad c_3=83a_2/54+5/18,\qquad a_4=4/3-8a_2/9$$
$$d_2=49b_2/108-10/81,\qquad d_3=83b_2/54-100/81,\qquad b_4=80/27-8b_2/9$$

将这些值代入 $F_0^{\text{new}}(z)$, 选择自由参变量 a_2 和 b_2 使 $F_0^{\text{new}}(z)$ 的谱半径小于 1, 从而得到 $L^2(R)$ 意义下的尺度函数，此时

$$F_0^{\text{new}}(1)=\begin{pmatrix}a_2+a_3+a_4 & c_1+c_2+c_3\\ b_2+b_3+b_4 & d_1+d_2+d_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}118a_2/27+16/9 & 22a_2/9+1/3\\ 118b_2/27+80/81 & 22b_2/9+32/27\end{pmatrix}$$

其特征多项式为 $\begin{vmatrix}\lambda-118a_2/27-16/9 & -22a_2/9-1/3\\ -118b_2/27-80/81 & \lambda-22b_2/9-32/27\end{vmatrix}=0$, 化简整理后为

$$\lambda^2-(118a_2/27+22b_2/9+80/27)\lambda+106a_2/81+26b_2/9+16/9=0$$

为了能够继续对 $F_0^{\text{new}}(z)$ 进行双尺度相似变换，令 $\lambda=1$, 则可以确定出 a_2 和 b_2 之间的关系为 $b_2=5/12+62a_2/9$, 从而特征方程化简为 $\lambda^2-(1718a_2/81+215/54)\lambda+1718a_2/81+161/54=0$ 。由于 $\lambda_1=1$, 不难求得 $\lambda_2=1718a_2/81+161/54$, 令 $|\lambda_2|\le 1$, 就可确定出 a_2 的取值范围是 $-0.1877\le a_2\le -0.0934$, 特别地取 $a_2=-0.1$, 将 a_2 代入其他系数中，可得 $F_0^{\text{new}}(z)$ 的表示式为

$$F_0^{\text{new}}(z)=\begin{pmatrix}-0.1z^{-2}+0.0433z^{-1}+1.4222 & -0.0176z^{-2}+0.1241z^{-1}-0.0176\\ -0.2722z^{-2}-3.1376z^{-1}+3.2049 & -0.2474z^{-2}-1.6530z^{-1}+2.4192\end{pmatrix}.$$

由于计算中的舍入误差，$F_0(z)$ 的近似表示为

$$F_0(z) = \frac{1}{2}(M(z^2))^* F_0^{\text{new}}(z)(M^{-1}(z))^*$$
$$= \frac{1}{z^4}\begin{pmatrix} -0.0088 - 0.0056z + 0.0056z^2 + 0.7772z^3 + 0.7023z^4 & 0.0088 - 0.0621z + 0.0621z^3 - 0.0088z^4 \\ 2.1244 + 2.1745z + 2.2853z^2 + 2.5299z^3 + 2.0187z^4 + 0.0621z^5 + 0.0088z^6 & -0.0088 + 0.0621z - 0.1413z^2 - 0.7644z^3 + 1.2008z^4 \end{pmatrix}$$

这样就求得了 $H_0(z)$ 的具有较高逼近阶的对偶滤波器.

3 结束语

本文在利用分形插值函数构造多尺度函数的基础上，结合双尺度相似变换，得到了多低通滤波器 $H_0(z)$ 的具有较高逼近阶的对偶滤波器，与文献 [2] 中对 GHM 多尺度函数求对偶尺度函数需要作 16 次双尺度相似变换相比较只需一次双尺度相似变换就可得到 $L^2(R)$ 上的对偶多尺度函数及其滤波器，大大的减少了计算量．然而，在应用中，多高通滤波器及其对偶滤波器是不可缺少的，那么，由多低通滤波器和它的有高逼近阶的对偶滤波器如何来确定性质良好的多高通滤波器及其对偶滤波器是值得进一步考虑的问题.

参　考　文　献

[1] Gerorimo J S, Hardin D P, Massopust P R. Fractal functions and wavelet expansions based on several scaling functions[J]. *J. Approxn. Theory*, 1994, 78: 373–401.

[2] Plonka G, Strela V. Construction of multi-scaling functions with approximation and symmetry[J]. *SIAM J. of Math. Anal.*, 1998, 29(2): 481–510.

[3] Strela V. A note on construction of biorthogonal multiscaling functions, Contemporary Mathematics, Wavelets Multiwavelets and Their Applications. A. Aldoubi, E. B. Lin, eds. AMS Philadelphia, 1998: 149–157.

[4] 朱春喜，徐长发，黎超，皮明红．对称反对称多重尺度函数的构造 [J]．高等学校计算数学学报，2000, 22(4): 371–378.

[5] 张彬，王卫卫，宋国乡．利用分形插值函数构造多小波尺度函数的一个新方法．工程数学学报，2002, 19(1): 55–60.

张　彬：　男，1965 年生，讲师，研究方向为多小波理论及其在图像处理中的应用.

王军锋：　男，1969 年生，副教授，研究方向为小波分析与自适应信号处理.

宋国乡：　女，1938 年生，教授，博士生导师，研究方向为小波分析与应用、有限元方法、微分方程数值解等.