

基于四阶累积量的后验稀疏约束迭代 DOA 估计方法¹

万 群 杨万麟

(电子科技大学电子工程学院 成都 610054)

摘 要 子空间 DOA 估计方法的一个缺点是在子空间分解过程中难以利用信号的相关信息或有关 DOA 估计的先验信息改善 DOA 估计的性能。该文结合子空间方法和四阶累积量矩阵拟和方法,利用信号四阶累积量矩阵的结构信息与信号间相互独立的先验信息,研究了一种新的不相关窄带信号波达方向(DOA)的迭代估计方法。理论分析和仿真实验结果表明,这种迭代 DOA 估计方法一般经过几次迭代就能获得稳定的高分辨率 DOA 估计。

关键词 四阶累积量,稀疏约束,子空间,DOA 估计

中图分类号 TN911.23

1 前 言

近年来,高阶统计分析由于它优于二阶统计分析的有效抑制各类高斯噪声的能力和对相位信息的处理能力,在各类信号处理问题中得到了越来越广泛的应用。高阶分析的复杂性和多样性决定了高阶分析方法的种类是很多的。在许多情况下,一般使用四阶累积量分析,因为高阶矩不具备像高阶累积量所具有的对各类高斯过程的不敏感性和数学形式上的各种良好性质,而对于对称分布的随机过程,三阶累积量为零,对于一些非对称分布的随机过程,三阶累积量也很小而其四阶累积量则较大^[1]。

在与谱估计测向有关的方面,将高阶累积量分析与二阶方法中常用的基于特征分解的子空间技术结合起来,可以得到比传统的二阶方法更好的估计性能^[1]。文献[2]指出,子空间 DOA 估计方法的一个缺点是在子空间分解过程中难以利用信号协方差矩阵的结构信息或有关信号 DOA 的先验信息。本文在文献[1, 2]的基础上,结合子空间方法和四阶累积量矩阵拟合(covariance matrix match)方法,利用信号四阶累积量矩阵的结构信息和信号间相互独立的先验信息,以及 DOA 估计的稀疏约束信息,研究了一种新的不相关窄带信号 DOA 估计方法。与文献[2]基于二阶分析的方法不同,本文利用的是四阶累积量信息,并且即使对于非均匀线阵,也可以避免与非线性极小化问题有关的多维梯度搜索过程。本文第 2 节给出了这种新的利用信号四阶累积量矩阵的结构信息和信号间相互独立的先验信息、基于子空间的 DOA 估计方法的信号模型。第 3 节给出了基于后验稀疏约束的迭代 DOA 估计方法和理论分析。第 4 节给出了计算机仿真试验的数值结果。最后是结论。

2 信号模型

假设阵元数为 M , 相邻阵元间的间隔为 $1/2$ 波长的均匀线阵, D 个窄带信号从方向 $\theta_i (i = 1, 2, \dots, D)$ 进入阵列。某 N 次快拍的阵列输出数据为

$$y(k) = A(\phi)s(k) + n(k), \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

其中 $y(k)$ 为 M 阶观测矢量, $A(\phi) = [a(\theta_1) \ a(\theta_2) \ \dots \ a(\theta_D)]$ 为 $M \times D$ 阶方向矩阵, $\phi = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_D]$ 是待估计参数, $a(\theta_i)$ 为由方向 θ_i 到达的信号的方向矢量, $a(\theta_i) =$

¹ 1999-09-29 收到, 2000-02-11 定稿

[1] $e^{-j2\pi(d/\lambda)\sin\theta_1} \dots e^{-j2\pi(M-1)(d/\lambda)\sin\theta_i}]^T$, $[]^T$ 表示转置, 信号矢量 \mathbf{s} 和噪声矢量 \mathbf{n} 是互不相关的零均值随机矢量. 由文献 [1] 可知, 观测矢量的四阶累积量矩阵为

$$\begin{aligned} C_y &= E[(y \otimes y^*)(y \otimes y^*)^H] - E(y \otimes y^*)E[(y \otimes y^*)^H] - E(yy^H) \otimes E[(yy^H)^*] \\ &= G(\phi)C_s G^H(\phi) + C_n \end{aligned} \quad (2)$$

其中 \otimes 为 Kronecker 矩阵乘积运算符, $()^H$ 表示共轭转置, $()^*$ 表示共轭, $G(\phi) = A(\phi) \otimes A^*(\phi)$, C_s 为信号源的四阶累积量矩:

$$C_s = E[(s \otimes s^*)(s \otimes s^*)^H] - E(s \otimes s^*)E[(s \otimes s^*)^H] - E(ss^H) \otimes E[(ss^H)^*] \quad (3)$$

C_n 为噪声的四阶累积量矩:

$$C_n = E[(n \otimes n^*)(n \otimes n^*)^H] - E(n \otimes n^*)E[(n \otimes n^*)^H] - E(nn^H) \otimes E[(nn^H)^*] \quad (4)$$

假设噪声为高斯分布的白噪声或色噪声, 则 $C_n = 0$, 于是有

$$C_y = G(\phi)C_s G^H(\phi) \quad (5)$$

假设信号源间相互独立, 则信号源的四阶累积量矩 C_s 中仅有 D 个元素不为 0, 这 D 个元素位于 C_s 对角线的第 $[(k-1)D+k]$ 位置, 其值为 α_k :

$$\alpha_k = \text{cum}(s_k, s_k, s_k^*, s_k^*) = E[s_k^2 (s_k^*)^2] - 2[E(s_k s_k^*)]^2 \quad (6)$$

$k = 1, 2, \dots, D$, 它是信号源四阶累积量原点值, 即峰态. 由于 $D^2 \times D^2$ 阶矩阵 C_s 完全由这 D 个元素决定, 因此存在一个 $D^2 \times D^2$ 阶的选择矩阵 L_1 和 $D \times D$ 阶的对角矩阵 Λ :

$$\Lambda = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_D) \quad (7)$$

使得

$$C_s = L_1 \Lambda L_1^H \quad (8)$$

容易证明

$$G(\phi)L_1 = [A(\phi) \otimes A^*(\phi)]L_1 = A(\phi) \circ A^*(\phi) \quad (9)$$

其中 \circ 为 Khatri-Rao 矩阵乘积运算符^[2], 相当于按列进行的 Kronecker 矩阵乘积运算. 于是 (5) 式简化为

$$C_y = B(\phi)\Lambda B^H(\phi) \quad (10)$$

其中

$$B(\phi) = [a(\theta_1) \otimes a^*(\theta_1) \quad a(\theta_2) \otimes a^*(\theta_2) \quad \dots \quad a(\theta_D) \otimes a^*(\theta_D)] \quad (11)$$

文献 [3] 又将 $B(\phi)$ 视为一个虚构阵列的响应系数矩阵, 这个虚构的阵列对方向 θ 的响应流形为

$$b(\theta) = a(\theta) \otimes a^*(\theta) \quad (12)$$

我们可以利用文献 [1] 的特征分解结果, 得到四阶累积量矩阵的降阶近似 \hat{C}_y . 为进一步利用四阶累积量矩阵的结构信息, 我们应用矢量化算子 vec 的性质: $\text{vec}(\mathbf{ABC}) = (\mathbf{C}^T \otimes \mathbf{A})\text{vec}(\mathbf{B})$, 将 (10) 式改写为

$$\text{vec}(\hat{C}_y) = \text{vec}[B(\phi)\Lambda B^H(\phi)] = [B^*(\phi) \otimes B(\phi)]\text{vec}(\Lambda) \quad (13)$$

由于 $D \times D$ 阶矩阵 Λ 是对角矩阵, 因此, 利用 $D^2 \times D$ 阶选择矩阵 L_2 , 可以将 D^2 阶矢量 $\text{vec}(\Lambda)$ 表示为 $L_2\mu$, μ 是由 Λ 的对角元素组成的 D 阶矢量。于是可将 (13) 式表示为

$$\text{vec}(\hat{C}_y) = [B^*(\phi) \otimes B(\phi)]L_2\mu \quad (14)$$

注意到: $[B^*(\phi) \otimes B(\phi)]L_2 = B^*(\phi) \circ B(\phi)$ 。定义 $M^4 \times D$ 阶矩阵 $F(\phi)$ 为

$$F(\phi) = [b^*(\theta_1) \otimes b(\theta_1) \quad b^*(\theta_2) \otimes b(\theta_2) \quad \cdots \quad b^*(\theta_D) \otimes b(\theta_D)] \quad (15)$$

因此又可将 (14) 式表示为

$$x = F(\phi)\mu \quad (16)$$

其中 $x = \text{vec}(\hat{C}_y)$ 。由 (1) 式给出 N 次快拍的阵列输出数据可以估计 (16) 式中等式的左边项 \hat{x} 。文献 [2] 给出了一种利用求解加权非线性最小二乘拟合问题, 通过 D 维搜索获得全局最优解来估计 DOA 参数的方法。本文下面将 (16) 式描述的非线性估计问题转化为线性反问题, 进一步利用 DOA 估计的稀疏特性约束线性反问题的求解, 获得了高分辨率 DOA 估计。

3 稀疏迭代 DOA 估计方法

假设知道信号 DOA 所在的区间, 将信号 DOA 所在的区间 M 等分, 由信号 DOA 所在的区间内的 Q 个等分 DOA 点对应的方向矢量构成 $M \times Q$ 阶方向矩阵 A , 即 $A = [a(\theta_1) \quad a(\theta_2) \quad \cdots \quad a(\theta_Q)]$, $\theta_i (i = 1, 2, \dots, Q)$ 是信号 DOA 所在的区间的 Q 等分点。构造 $M^2 \times Q$ 阵 $B = U \circ U^* = [a(\theta_1) \otimes a^*(\theta_1) \quad a(\theta_2) \otimes a^*(\theta_2) \quad \cdots \quad a(\theta_Q) \otimes a^*(\theta_Q)]$, $M^4 \times Q$ 阵 $F = B^* \circ B = [b^*(\theta_1) \otimes b(\theta_1) \quad b^*(\theta_2) \otimes b(\theta_2) \quad \cdots \quad b^*(\theta_Q) \otimes b(\theta_Q)]$ 以及 Q 阶矢量 $c = [c(1) \quad c(2) \quad \cdots \quad c(Q)]^T$, 其中 c 中只有对应信号 DOA 的 D 个元素不为零, 其它 $Q - D$ 个元素都为零, 从而将 (16) 式描述的非线性问题转化为已知 F 和 \hat{x} , 求解 c 的线性反问题:

$$Fc = \hat{x} \quad (17)$$

由估计的矢量 c 中的峰值可以得到信号的 DOA 估计。因为一般有 $Q \gg D$, 所以矢量 c 具有稀疏特性。稀疏矢量 c 的估计问题是一个 NP 完全问题, 难以用穷举搜索 (如吝啬算法) 或启发式搜索 (如遗传算法) 来解决 [4,5]。

由于一般有 $Q > M$, 因此线性方程组 (17) 式是欠定的, 解不唯一, 必须在其它的约束条件下才能得到唯一解。在极小范数约束下, 通过直接计算方向矩阵的 Moor-Penrose 广义逆矩阵可以得到

$$c_0 = F^+ \hat{x} \quad (18)$$

其中 $[]^+$ 表示矩阵的 Moor-Penrose 广义逆矩阵。但是, 由于矩阵 F 的 Q 个列矢量间的强烈相关性, 求解矢量 c 的线性反问题是严重病态的。定义集合 S :

$$S = \{c : \|Fc - \hat{x}\| < \varepsilon, \varepsilon > 0\} \quad (19)$$

即使 ε 取很小的值, 集合 S 的元素间的差异也是很大的, 即很小的噪声都将使求解 (11) 式线性方程组得到的信号矢量 c 很不稳定 [4]。正则化处理 [6] 可以缓解问题的病态程度, 但得到的矢量 c 一般不具有稀疏特性 [4,7]。

(12) 式的极小范数解虽然不具有稀疏性和高分辨率特性, 但它可以提供关于信号能量相对于 DOA 分布的粗略信息, 即粗略的说, 幅值较大的 $c_0(q)$ 有较大的可能对应于真实 DOA 的位置. 利用这种后验的约束信息 (或者由其它估计方法得到的空间谱估计), 将线性方程组 (17) 式转换为

$$Gg = \hat{x} \quad (20)$$

其中 $G = FW_0$, $g = W_0^+c$, W_0 是对角元素为 $W_0(q)$, $q = 1, 2, \dots, Q$ 的对角型加权矩阵. 求解线性方程组 (14) 式得到的正则化的加权极小范数最小二乘解为

$$c_1 = W_0(GG^H + \alpha I)^{-1}\hat{x} \quad (21)$$

其中 $\alpha > 0$ 为正则化系数. 可以证明, 解 (15) 式与如下二次泛函:

$$\|\hat{x} - Fc\|^2 + \alpha\|W_0^+c\|^2 = \|\hat{x} - Fc\|^2 + \alpha \sum_{q=1}^Q |c(q)/W_0(q)|^2, \quad c \in C^Q \quad (22)$$

的极小化问题的解相同 (假设 $W_0(q) > 0$).

由二次泛函 (22) 式可见, 不同的 $W_0(q)$ 将使信号能量集中在不同的 $c(q)$ 上. 若已知有关信号 DOA 的先验知识, 与信号 DOA 相应的 $W_0(q)$ 可以取相对较大的幅值, 它们的作用是削弱相应的 $c(q)$ 对二次泛函 (16) 式的影响, 结果在极小化二次泛函 (22) 式的约束下, (21) 式解中的 $c(q)$ 的值将变大, 即能量将集中在这些 DOA 上. 相反, 不对应信号 DOA 的 $W_0(q)$ 可以取相对较小的幅值, 它们的作用是增强相应的 $c(q)$ 对加权范数的影响, 结果在极小化二次泛函 (22) 式的约束下, (21) 式解中的 $c(q)$ 的幅值将变小. 虽然实际上我们不知道有关信号 DOA 的确定知识, 无法得到加权矩阵 W_0 , 但 (18) 式能够粗略提供有关信号 DOA 的后验知识, 于是, 可以取 W_0 为

$$W_0 = \text{diag}(c_0) \quad (23)$$

将它代入 (21) 式可以得到新的解 c_1 , 将 c_1 代入 (23) 式又可得到新的加权矩阵 W_1 , 依此类推, 进一步的迭代将实现能量的进一步集中, 最终获得具有稀疏特性的解 \hat{c} , 由 \hat{c} 的峰值可以获得高分辨的 DOA 估计. 因此, 我们又称加权矩阵 W 为稀疏约束加权矩阵.

具体的迭代算法总结如下:

- (1) 选取初始值: 由 (21) 式得 c_0 , 令 $t = 0$;
- (2) 更新稀疏约束加权矩阵: $W_t = \text{diag}(c_t)$;
- (3) 迭代: $c_{t+1} = W_t(FW_tW_t^H F^H + \alpha I)^{-1}FW_t\hat{x}$, $t = t + 1$, 重复 (2).

可见, 这种算法的最优化过程并不是将某个事先给定的目标函数极小化, 每次需要极小化的目标函数 (见 (22) 式) 在迭代过程中是变化的. 利用非线性规划理论中的全局收敛定理, 可以证明这种算法的绝对收敛性^[5,7].

4 数值结果

考虑间隔为 $\lambda/2$ 的 3 个阵元的均匀线阵, 待估计的 DOA 区间定为 $[-10^\circ, 10^\circ]$, 角度间隔为一个波束宽度 (约为 57°) 的 $1/64$. 2 个窄带信号的波达方向分别为: $\theta_1 = -2.0^\circ$, $\theta_2 = 1.0^\circ$, 噪声为零均值高斯噪声, 最小信噪比为 7dB. 相互独立的快拍数为 200.

对于均匀线阵, 利用四阶累积量矩阵结构的冗余信息^[8], 可以将 $M^4 \times Q$ 阶矩阵 F 简化 $(4M - 3) \times Q$ 阶矩阵, 降低计算量. 图 1(a) 给出了基于协方差矩阵的特征结构分解的 MUSIC

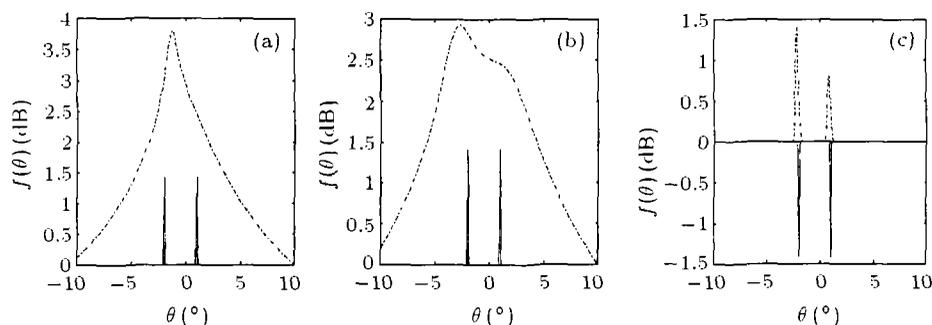


图 1 实线: 实际 DOA 位置, 虚线: 空间谱估计位置或 DOA 估计位置
 (a) 基于协方差矩阵特征分解的 MUSIC 型^[1]DOA 估计结果;
 (b) 基于四阶累积量矩阵特征分解的 MUSIC 型^[1]DOA 估计结果;
 (c) 经过 5 次迭代后的稀疏矢量 c 的估计结果

型 DOA 估计方法^[1]得到的 DOA 估计结果 (虚线), 图 1(b) 给出了基于四阶累积量矩阵的特征结构分解的 MUSIC 型 DOA 估计方法^[1]得到的 DOA 估计结果 (虚线), 图 1(c) 给出了经过 5 次迭代后的稀疏矢量 b 的估计结果 (虚线), 并同时用实线标出了实际信号的 DOA 位置。 $\alpha = 10^{-2}$, 关于正则化系数 α 的取值问题可以参考文献 [6]。

5 结 论

子空间 DOA 估计方法的一个缺点是在子空间分解过程中难以利用信号的相关信息或有关 DOA 估计的先验信息改善 DOA 估计的性能。本文结合子空间方法和四阶累积量矩阵拟和方法, 利用信号相关信息和 DOA 估计的稀疏约束信息, 研究了一种新的不相关窄带信号波达方向 (DOA) 估计方法。理论分析和仿真实验结果表明, 这种迭代 DOA 估计方法一般经过几次迭代就能获得稳定的高分辨率 DOA 估计。本文虽然只给出了均匀线阵的仿真实验例子, 但对于非均匀阵是同样适用的。

参 考 文 献

- [1] 魏平, 肖先赐, 李乐民, 基于四阶累积量特征分解的空间谱估计测向方法, 电子科学学刊, 1995, 17(3), 243-249.
- [2] M. Jansson, B. Goransson, B. Ottersten, A subspace method for direction of arrival estimation of uncorrelated emitter signal, IEEE Trans. on SP, 1999, SP-47(3), 945-956.
- [3] 魏平, 肖先赐, 基于四阶累积量的阵列扩展, 电子科学学刊, 1997, 19(6), 745-750.
- [4] I. F. Gorodnitsky, B. D. Rao, A recursive weighted norm minimization algorithm and its application, in Proc. Int. Conf., ASSP, Minneapolis, Apr., 1993, 456-459.
- [5] B. D. Rao, L. K. K. Delgado, An affine scaling methodology for best basis selection, IEEE Trans. on SP, 1999, SP-47(1), 187-200.
- [6] P. C. Hansen, Analysis of discrete ill-posed problems by means of L-curve, SIAM Rev., 1992, 34(4), 561-580.
- [7] I. F. Gorodnitsky, B. D. Rao, Sparse signal reconstruction from limited data using FOCUSS (FOCual Underdetermined System Solver), A re-weighted minimum norm algorithm, IEEE Trans. on SP, 1997, SP-45(3), 600-615.

- [8] D. A. Linebarger, Redundance averaging with large array, IEEE Trans. on SP, 1993, SP-41(4), 1707-1710.

A FOURTH-ORDER CUMULANT BASED RECURSIVE APPROACH TO DOA ESTIMATION WITH SPARSITY CONSTRAINT

Wan Qun Yang Wanlin

(*University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054*)

Abstract One disadvantage with subspace-based DOA estimate method is that it is difficult to incorporate prior knowledge of the signal correlation into the eigen-decomposition. Herein, an estimator that combines ideas from subspace and four-order cumulant matching method is proposed, which makes it possible to incorporate the prior knowledge of signal correlation and sparsity of the DOA estimation into the estimator. Theoretical analysis and numerical results illustrate the robust and high resolution character of the estimator.

Key words Fourth-order cumulants, Sparsity constraint, Subspace, DOA estimation

万 群: 男, 1971 年生, 博士生, 目前进行阵列信号处理、分布式目标波达方向估计的研究.

杨万麟: 男, 1945 年生, 教授, 博士生导师, 长期从事阵列信号处理、实时高速信号处理、大阵列微波成像系统的科研和教学工作.